PROBLEMI ATTUALI DI MECCANICA APPLICATA

a ricordo del Professor Giovanni Jarre

Atti della Giornata di studio tenutasi presso il Politecnico di Torino
13 ottobre 1989

SUPPLEMENTO AL VOL. 125 - 1991
Atti della Accademia delle Scienze di Torino
Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
ACCADEMIA DELLE SCIENZE
1991

PROBLEMI ATTUALI DI MECCANICA APPLICATA

a ricordo del Professor Giovanni Jarre

Atti della Giornata di studio tenutasi presso il Politecnico di Torino
13 ottobre 1989

SUPPLEMENTO AL VOL. 125 - 1991
Atti della Accademia delle Scienze di Torino
Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
ACCADEMIA DELLE SCIENZE
1991

INDICE

Pagine

Presentazione

Il 13 ottobre 1989 ha avuto luogo a Torino, nella sala di Consiglio di Facoltà di Ingegneria del Politecnico, la Giornata di studio a ricordo di Gianni Jarre, improvvisamente ed immaturamente scomparso l'8 ottobre 1988.

Erano presenti numerosi colleghi ed amici, che hanno voluto manifestare la stima, l'affetto ed il desiderio di mantenere vivo il ricordo di Lui, all'insegna di quelle Scienze Meccaniche, in cui Egli aveva prodigato le doti migliori del Suo intelletto.

A quell'appuntamento ero presente anche io, che fin dal lontano 1948 avevo con Lui iniziato a percorrere l'arco della carriera universitaria, prima come assistenti di Aerodinamica, sotto la guida del nostro comune, sommo Maestro Carlo Ferrari, poi come docenti in rami diversi della Meccanica.

Mi è stato affidato il compito di presentare questo volume che raccoglie i contributi della Giornata di studio: che profonda commozione mi rivolgo ai gentili lettori, nel segno della grande amicizia che mi legava a Gianni Jarre, e della grande stima che riponevo nella Sua acuta ed arguta intelligenza. La Sua figura di scienziato, di docente, di uomo, è illustrata nel modo più autorevole nella commemorazione di Carlo Ferrari.

Testimonianze importanti e significative vengono date da Rolando Rigamonti, Pietro Buzano, Carla Oggiano e Vittorio Marchis.

Segue poi la parte più strettamente attinente al tema specifico della Giornata, con le memorie di Massimo Germano, Ettore Antona, Gino Moretti, Maurizio Pandolfi, Luigi G. Napolitano e Antonio Viviani, Placido Cicala, Ario Romiti, oltre che del sottoscritto. Tutti devono essere ringraziati caldamente per essersi prodigati con impegno e tempestività in questo tributo corale di stima pe l'Amico scomparso, ma soprattutto per averlo fatto con una forte carica spirituale ed affettiva, a testimonianza del sincero rimpianto per il nostro indimenticabile Gianni.

Torino, Aprile 1991

Silvio Nocilla

Commemorazione di Gianni Jarre
(1924-1988)

Carlo FERRARI

Commemorare un caro Collega è sempre triste compito, ma se questo Collega è stato Allievo, Collaboratore intelligente ed attivo dall'inizio della Sua carriera accademica sino alla fine, amico carissimo sempre vicino nei momenti tristi e lieti della vita, alla tristezza si aggiunge un sentimento più profondo, più intimo, è come se qualcosa dentro di noi si sia spezzato. Comprederete perciò il mio stato d'animo.

Io ho conosciuto Gianni Jarre nel 1948; mi fu presentato da Gino Moretti, che era mio Assistente per la Cattedra di Meccanica razionale e aveva deciso di lasciare Torino per correre la sua avventura in Argentina. Moretti e Jarre si erano conosciuti a Vevey (Svizzera), dove erano espatriati per sfuggire ai nazi-fascisti.

Jarre era a quell'epoca allievo in questo Politecnico, e avendo potuto seguire a Vevey Corsi tenuti da illustri professori italiani pure rifugiatisi in Svizzera, fra i quali Gustavo Colonnetti, al Suo ritorno in Italia, alla fine della guerra, era riuscito a conseguire la laurea in Ingegneria Meccanica già nel 1948. Il risultato di quel colloquio fu che, quando Moretti ci lasciò, Gianni gli subentrò come Assistente, e da quell'epoca non mi abbandonò più, seguendomi quando io, dopo il ritiro del Prof. Panetti, passai all'insegnamento della Meccanica applicata. La Sua brillante intelligenza e la Sua profonda preparazione lo spinsero subito a svolgere una intensa attività scientifica, e con Lui e con altri giovani studiosi di altissimo valore (giovani allora, valentissimi sempre), Silvio Nocilla, Aldo Muggia, Ario Romiti, si costituì un gruppo animato dal più grande fervore e desiderio di affrontare i problemi alla ribalta dopo il digiuno scientifico prodotto dai lunghi, dolorosi anni della guerra. Tale attività lo portò nel 1955 al conseguimento della libera docenza in Aerodinamica, e nel 1958 alla cattedra prima di Aerodinamica e poi di Gasdinamica presso il Politecnico di Torino. Qui divenne direttore dal 1973 al 1978 dell'Istituto interdisciplinare di Meccanica applicata, Aerodinamica e Gasdinamica, e dal 1974 direttore del Centro Studi di Dinamica dei fluidi del C.N.R. Fu inoltre Presidente del Consiglio scientifico del «Centro Studi per le ricerche sulla Propulsione e sull'Energia» del

Politecnico di Milano; Membro del Consiglio scientifico dell'INSEAN (Vasca Navale) di Roma, e del CETENA (Centro Studi Tecnica Navale) di Genova. Per la sua rinomanza di Tecnico e Scienzato insigne fu ricercato per consulenza da industrie privati ed Enti pubblici nazionali ed internazionali: così, fu Impiantista industriale termomeccanico dal 1948 al 1960, Consulente della C.E.E. nel 1968-70 per un'indagine sull'industria aerospaziale europea. Nel 1962 fu accolto per un periodo di due mesi come «visitatore» dall'Accademia sovietica delle Scienze, dove fece una proficua indagine su svariati problemi di Aero e Gasdinamica. L'intenso impegno nell'attività scientifica non lo distolse da un intenso impegno anche nell'attività didattica: tenne, oltre all'insegnamento del Corso di cui era titolare, quello di «Meccanica applicata alle Macchine e Macchine» per allievi-ingegneri civili dal 1960 al 1978; profondamente sensibile ai problemi della Scuola, e non soltanto di quella universitaria, svolse per diversi anni corsi di aggiornamento tecnico-scientifico per i Docenti di formazione professionale, tra i quali corsi citerò uno dedicato alla Matematica di base, ed un altro, in collaborazione con Gianfranco Chiocchia, alla Meccanica applicata.

Per l'opera da Lui svolta nei campi tecnico, scientifico e didattico non gli mancarono i riconoscimenti: fu nominato Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Torino nel 1960 e Socio Nazionale della stessa Accademia nel 1983; fu insignito della «Medaglia d'oro di benemerito della Scienza, della Cultura e dell'Arte» da parte del Ministero del P.I. nel 1984; era Membro del Consiglio direttivo del Centro di Astrodinamica «Giuseppe Colombo». Altri riconoscimenti avrebbe certamente meritati.

Per quanto si riferisce alla Sua attività scientifica, questa riguarda essenzialmente tre campi: Macchine a fluido; Gastermochimica; Flussi di strato limite; e le sue caratteristiche principali sono: ingegnosità e, almeno per i primi due campi sopra menzionati, pionerismo.

Le ricerche sulle Macchine a fluido furono le prime da Lui effettuate nel periodo 1948-1952: alla fine della seconda guerra mondiale erano apparsi i primi aeroplani militari a reazione, come si diceva impropriamente allora, a getto secondo la denominazione attuale.

La propulsione a getto era problema da lungo tempo studiato, ed era stata discussa pure nel celebre «Convegno Volta» del 1935, presso l'Accademia d'Italia, ma la sua realizzazione richiedeva la possibilità di costruire compressori rotativi di elevato rendimento: da qui la necessità di uno studio delle leggi che determinano il moto di un gas in una turbomacchina, più approfondito di quello corrispondente agli schemi tradizionali di calcolo delle macchine stesse, allora in uso. Detti metodi

tradizionali furono molto duri a morire, particolarmente in Italia: ora Jarre nel 1948 (e quindi a soli 24 anni) nella nota «Un nuovo tipo di stadio di compressione, per compressori assiali» studia il tipo di compressore detto «a vortice libero», per il quale la circuitazione è costante lungo le pale, e per detto tipo indica un procedimento di calcolo per il dimensionamento del compressore stesso, dimostrando come la adozione dello stadio proposto consenta una notevole riduzione del numero totale di elementi, rispetto ai normali compressori assiali multipli. Nel 1952 poi scrive una monografia «Compressori assiali a vortice libero», che è in realtà un trattato sull'argomento, che per la completezza e la profondità, colla quale i problemi aerodinamici e termodinamici ad esso relativi sono considerati, è tuttora pienamente valido. In effetto, in detta monografia, tra altri risultati interessanti: 1) è dedotta e discussa la dipendenza del rendimento del compressore dall'efficienza dei profili alari utilizzati come sezioni delle pale; dai gradi di azione e di reazione della sezione periferica, definiti come rapporti del salto di energia realizzato nello statore e nel rotore, al salto totale di ogni singolo stadio; dal rapporto di funzionamento, definito come rapporto tra la velocità assiale e la velocità rotatoria periferica del rotore, ed infine dal rapporto fra raggio interno e raggio esterno di ogni stadio; 2) è analizzata l'influenza della compressibilità, e quindi del numero di Mach, e della viscosità, e quindi del numero di Reynolds, sulle prestazioni del compressore. Sempre al campo delle macchine a fluido appartiene un'altra Nota del titolo: «Moto di un fluido compressibile in una girante radiale di turbomacchine» (1950), particolarmente notevole per l'eleganza della trattazione matematica: il problema era stato studiato da Busemann nel 1928, per il caso del fluido incompressibile non viscoso, per il quale la soluzione può essere ottenuta in modo relativamente semplice col metodo della trasformazione conforme, inapplicabile però nel caso ora indicato.

Jarre linearizza le equazioni del moto colla semplice ipotesi che l'aumento di entalpia sia essenzialmente prodotto dal lavoro della forza centrifuga, e riesce ad esprimere, almeno in prima approssimazione, il potenziale del flusso compressibile attraverso la girante per mezzo del potenziale del flusso incompressibile.

Pioneristiche ed ingegnose sono pure le ricerche svolte nel periodo 1955-1965 sulla gasdinamica delle miscele di gas inerti o reagenti; e come quelle precedenti sulle macchine a fluido furono determinate dall'avvento della propulsione a getto, così queste ricevettero stimolo ed impulso dal grande interesse suscitato dai nuovi fenomeni, che il raggiungimento delle alte velocità consentito da detto sistema di propulsione propose

alla stadio dei fluidodinamici. Questi fenomeni sono quelli connessi colle elevate temperature, che si generano in una corrente ad alto numero di Mach quando essa è bruscamente frenata o da un'onda d'urto o dall'attrito a contatto di una parete solida nello strato limite adiacente ad essa. Ed anche in questo campo Jarre sviluppò in una magistrale monografia «Elementi di gasdinamica delle miscele» (1955) i fondamenti di questa nuova branca della Dinamica dei fluidi, dando ad essi notevoli contributi originali, formulando differenti espressioni della equazione dell'energia, delle quali diede interessanti interpretazioni, ed indicando come le ipotesi della termodinamica dei processi irreversibili, ed in particolare il teorema di Onsager, siano implicitamente contenute nella teoria cinetica dei gas. In una Nota successiva «Un modello semplificato di miscela multipla di gas» (1956), pubblicata dall'Accademia dei Lincei, nelle ipotesi che i coefficienti di termo-diffusione siano nulli, i coefficienti di mutua diffusione uguali, i numeri di Prandtl e di Schmidt siano uguali a uno per tutti i costituenti la miscela, dimostrò che il trasporto di massa del costituente i-esimo, a parte la sua produzione chimica di massa, è prodotto dal gradiente di frazione di massa soltanto di detto costituente, mentre, nel caso di flusso di strato limite, il trasporto conduttivo, diffusivo e viscoso di energia è ridotto ad un fenomeno di opposizione al solo gradiente di energia totale (ossia, termica, chimica e cinetica), ed infine che, sempre per fenomeni di strato limite esiste l'integrale primo dell'energia totale: questo, che generalizza per miscele multiple di gas reagenti il classico integrale primo di Busemann, può ben a ragione chiamarsi «integrale primo di Jarre». Sempre nell'ipotesi già detta relativa ai numeri di Prandtl e di Schmidt, considerando una corrente uniforme di miscela di gas e di vapore surriscaldato lambente una superficie piana parallela alla corrente stessa e sulla quale il vapore può cambiare stato, nel caso in cui siano costanti le velocità tangenziali, le entalpie e le concentrazioni di vapore sia nella corrente libera che sulla superficie, Jarre dimostrò l'esistenza di altri integrali primi esprimenti *l'analogia dei campi* (di velocità, di entalpia, di concentrazione), per mezzo della quale le leggi di variazione della velocità, della entalpia e della concentrazione sono definite da una unica funzione, e *l'analogia degli scambi* (di quantità di moto, di calore e di massa), che mette in relazione la tensione di attrito alla parete, la quantità di calore trasmessa per unità di superficie nell'unità di tempo, e la portata di vapore emessa dalla parete per unità di superficie: l'analogia dei campi sussiste fra le grandezze misurate per unità di massa di miscela, mentre l'analogia degli scambi sussiste fra le grandezze misurate per unità di massa di gas. Dette analogie, che costituiscono la generalizzazione delle classiche analogie di Reynolds e di

Colburn al caso di miscele binarie, in quanto esse valgono per velocità comunque elevate, per concentrazione di vapore comunque grande, per valori diversi dei calori specifici del gas e del vapore, e per tutti i regimi di moto, dall'ordinatissimo moto laminare di Couette ad disordinatissimo moto completamente turbolento, possono a buon diritto essere chiamate «analogie di Jarre». Una applicazione molto interessante di esse è stata da Lui fatta nello studio del raffreddamento evaporativo per contrastare il riscaldamento aerodinamico e superare la cosiddetta «barriera termica», studio i cui risultati sono da Jarre sintetizzati con questa immagine: un mezzo fornito di un sistema di raffreddamento evaporativo ed un mezzo fornito di un sistema di iniezione di gas normalmente alla superficie lambita si comportano rispettivamente come bulbo umido e come bulbo secco di uno psicrometro atmosferico in una atmosfera riscaldata per attrito.

Altre fondamentali applicazioni della gasdinamica di miscele di gas, da Lui fatte, riguardano la determinazione della struttura di un'onda d'urto retta intensa in un gas puro biatomico, pubblicata nel numero del «Journal of Applied Mathematics and Physics» dedicato a Jacob Ackeret in occasione del suo 60mo anno, e del flusso nello strato limite di una parete adiabatica in corrente ipersonica, sempre di un gas puro biatomico. In entrambi i casi si presenta il problema della formulazione della velocità di reazione corrispondente ai processi di dissociazione e di ricombinazione conseguenti alle alte temperature provocate dalla brusca decelerazione della corrente ipersonica; difficilissimo problema di cinetica chimica per il quale non esiste tuttora una soluzione generale soddisfacente. Tuttavia per la particolare semplice reazione sopra indicata, Jarre applicando la teoria della cinetica chimica assoluta, che postula l'esistenza di uno stato intermedio fra la molecola e i due atomi, chiamato complesso attivato, le cui proprietà determinano la velocità di reazione, perviene ad una formulazione di detta velocità ammettendo che il complesso attivato abbia le caratteristiche che minimizzano la sorgente di entropia della reazione. In conseguenza del valore finito dalle valocità della reazione chimica, sia a valle dell'onda d'urto sia a valle dell'arresto sul bordo di attacco della lamina piana si ha uno stato di non equilibrio, e quindi un processo di rilassamento durante il quale il fluido si raffredda progressivamente col progredire della reazione verso l'equilibrio, e i risultati delle ricerche cui prima ho accennato si possono così sintetizzare: a valle dell'urto il fenomeno di rilassamento è molto veloce, e può pertanto essere considerato come raggiuntimento quasi istantaneo dell'equilibrio; a contatto della lamina adiabatica il rilassamento è molto più lento e può pertanto in generale essere considerato

in prima approssimazione come persistenza indefinita dello stato di non equilibrio, ossia di flusso congelato, secondo la terminologia usata in gasdinamica.

Ed ancora deve essere ricordata la fondamentale Memoria «The internal structure of the shock wave — Multicomponent mixtures», nella quale dimostra che lo spessore dello strato d'urto nel flusso di una miscela a N componenti inerti, qualunque sia il numero di detti componenti, non è mai più grande di quello corrispondente a una miscela binaria dei soli gas più leggero e più pesante, e questo in contraddizione a quanto si deriverebbe dall'osservazione che ogni nuovo fenomeno irreversibile, come quello della diffusione di un nuovo componente della miscela, dando origini ad un nuovo termine della sorgente di entropia, dovrebbe pure aumentare lo spessore dello «strato d'urto».

Un terzo gruppo di ricerche fu dedicato da Jarre, come già prima detto, a partire dal 1966 allo studio aerodinamico e termodinamico del flusso laminare nello strato limite bidimensionale in condizioni di grande generalità per quanto riguarda sia la corrente esterna allo strato, sia le condizioni alla parete delimitante lo strato stesso. Sono problemi questi che già erano stati trattati da illustri Cultori della Meccanica dei fluidi, quali ad es. Blasius, von Kármán, Betz, Görtler, Lighthill, Schlichting; per altro i procedimenti da loro proposti o sono molto complessi, e questa complessità rende difficile la valutazione dell'approssimazione nella quale i vari problemi sono risolti, o non sono validi in presenza di singolarità del flusso, quali ad es. si hanno se si produce distacco della corrente dalla parete lambita. L'uso del calcolatore, colla possibilità che questo dà di ottenere soluzioni numeriche anche di equazioni di grande complessità, può far sembrare le analisi teoriche in questo campo superate, ma questo non è. Il calcolatore dà solo risultati numerici in ogni singolo problema, e pertanto non è facile da essi dedurre proprietà di carattere generale; indica *come* un fenomeno avviene, ma non *perché* avviene, e la presenza di singolarità insieme colla non linearità delle equazioni rende il loro uso molto delicato. Mi ricordo di avere inteso da Giuseppe Colombo, che di Jarre fu grande amico e stimatore, che Egli era solito suggerire ai suoi Allievi e Collaboratori che prima di fare ricorso al calcolatore, prendessero regolo e matita e vedessero se con questi fosse possibile dedurre qualcosa che aiutasse a comprendere il problema fisico. E un concetto analogo mi pare esprima Gino Moretti quando in «Towards a closer cooperation between Theoretical and Numerical Analysis in Gasdynamics» suggerisce di sottoporre ad una analisi teorica i fenomeni descritti dalle equazioni prima di procedere alla loro discretizzazione, e quindi all'uso del calcolatore. Ora le ricerche di Jarre, cui ho

accennato, si prestano mirabilmente a detta investigazione perché in esse, con procedimenti tanto semplici quanto ingegnosi, si perviene ad illustrare chiaramente i fenomeni che avvengono nei flussi di strato limite. Io mi limiterò a segnalare tra esse solo quelle relative alla determinazione delle tensioni tangenziali e della trasmissione termica alla parete perché particolarmente significative ai fini sopra indicati. Esse conducono, per mezzo di operazioni non lineari molto semplici, ad una determinazione della tensione di attrito e della trasmissione termica alla parete in ogni punto di questa, che mostra in maniera molto espressiva la loro dipendenza dalle leggi di variazione della velocità e della entalpia esterne allo strato, e della entalpia alla parete in ogni punto di questa, e precisamente, secondo le parole usate da Jarre, dal presente e dal futuro rispetto al punto in esame, dell'evolversi della velocità e della entalpia. In particolare, per la trasmissione termica, nel caso di entalpia di parete variabile, il metodo di Jarre mette bene in evidenza il sistematico duplice meccanismo di *ispessimento* e di *anticipazione*, ispessimento dello strato limite lungo la parete, anticipazione nel senso che la trasmissione termica in un punto generico avviene come se il valore della entalpia in detto punto fosse uguale all'entalpia in un punto spostato più a valle, e questa anticipazione risulta proporzionale ad una lunghezza, che memorizza quanto avviene a monte del punto stesso. L'applicazione del medoto di Jarre sia alle correnti «simili» rappresentate dalle equazioni di Falkner e Skan, e di Fage-Falkan, sia al flusso in corrispondenza del punto di arresto della corrente e sia alla corrente attorno ad un profilo circolare, mostra un'ottima concordanza coi risultati ottenuti con soluzione numerica da Hartree e da Curle e Rosenhead ed inoltre, con detto metodo si trova subito la singolarità di Goldstein nel punto di separazione della corrente, mentre si toglie il paradosso di flusso termico nullo in questo punto, quale risultava invece dalle trattazioni di Lighthill e di altri. Ed ancora: a) si determina subito il punto di inversione termica, caratterizzato dall'annullarsi della trasmissione termica in detto punto e si dimostra che in esso non si ha alcuna singolarità; b) si ottengono le espressioni asintotiche dei coefficienti di trasmissione termica per numero di Prandtl tendente a zero (caso dei plasma, dei metalli liquidi), o tendente all'infinito (caso degli olii).

L'attività scientifica di Jarre non si è limitata ai campi di cui ho fatto cenno; i Suoi interessi scientifici e la Sua cultura erano molto vasti. Aveva una mente termodinamica, ed aveva così bene assimilati i concetti, spesso astrusi, della termodinamica (si pensi al paradosso di Gibs relativo alla entropia di miscele di gas), che sapeva farli comprendere anche a chi aveva con essi poca familiarità. È stato detto da taluni che Egli non era

amico della Matematica: nulla di più falso. Aveva un grande rispetto della Matematica, ed un'ottima cultura di essa, come appare chiaramente dai Suoi lavori nei quali aveva saputo applicare con assoluto rigore e con eleganza metodi e concetti matematici molto elevati. Quello che non amava era il narcisismo della Matematica, o per dirla ancora colle parole di Giuseppe Colombo, non amava quella Matematica «che si limita a un raffinamento di vecchi strumenti di calcolo o lo sviluppo di formalismi, sovrastrutture e generalizzazioni non necessarie».

Accanto alla figura di Gianni Jarre scienziato, si deve considerare quella di Gianni Jarre docente. Era docente efficace e brillante; ambidestro, sapeva disegnare sulla lavagna contemporaneamente con entrambe le mani, così che gli allievi del terzo anno potevano seguire ammirati e stupiti l'ingranamento di due ruote dentate, rappresentate sulla lavagna contemporaneamente, e seguire lo spostamento del punto di contatto dei due profili coniugati dai denti in presa durante l'ingranamento. Sapeva usare un linguaggio colorito, atto a descrivere con maggiore evidenza il fenomeno in istudio: così ad es., a commento della proprietà da Lui trovata e di cui ho fatto prima cenno, che nel flusso laminare su parete con entalpia di questa variabile, si ha un sistematico doppio fenomeno di ispessimento dello strato limite, e di anticipazione proporzionale ad una lunghezza che memorizza il passato, Egli dice: «lo strato limite diventa previdente coll'età». Spesso sapeva usare anche l'arguzia, connaturale in Lui, dotato di forte spirito di humour; così ad es. nelle Sue lezioni di «matematica di base» per i docenti di formazione professionale, parlando del concetto di «infinito» così si esprime: «in tutti i casi prima considerati, il vero, pieno, autentico infinito è stato approssimato ma mai raggiunto; è rimasto un lontano traguardo intoccabile, soltanto immaginato come passaggio al limite, quasi per un naturale bisogno di tranquillante completezza. Eppure c'è un caso in cui il vero infinito, proprio tutto, infinitamente completo è a portata di mano, concreto e tangibile: un docente universitario riceve uno stipendio fisso dallo Stato per insegnare e ricercare; pratica invece una impegnativa professione, che gli impone il full-time extra muros. La sua paga oraria, con zero ore prestate intra-muros, fa pieno centro nel pieno infinito. Egli cioè riesce a totalizzare *paga oraria infinita, seppur statale*».

Gianni Jarre scienziato, docente, uomo: era Uomo di grande generosità d'animo, e questo lo posso ben testimoniare io, che ne ho avuto tante prove in tanti anni di comune militanza in questo Politecnieo; Uomo di pensiero, riteneva che ogni attività umana doveva tendere al progresso spirituale e materiale dell'uomo. Per questo apprezzava grandemente il motto *Veritas ed Utilitas* della nostra Accademia, della quale era

fiero di farne parte, e per la quale non aveva risparmiato tempo e fatica per dare il Suo contributo alla celebrazione del bicentenario di essa; per questo, nella Sua magistrale Relazione «Il contributo dell'Accademia allo sviluppo delle Scienze Tecniche» nel Convegno tenuto a ricordo dei primi due secoli dell'Accademia stessa, e così pure nella altrettanto magistrale Relazione scritta in collaborazione con Vittorio Marchis «Accademici o Tecnologi?» pubblicata nel volume «Tra Società e Scienza», ed ancora nella bella Conferenza, da Lui scritta e proprio qui, in questa sala, letta purtroppo a Sua morte già avvenuta, aveva messo bene in evidenza quanto l'Accademia aveva fatto per onorare il suo motto.

Uomo molto sensibile ai problemi umani e sociali, oltre che a quelli scientifici, riteneva che nel passaggio dalla *Veritas* alla *Utilitas* il contributo dell'*Homo Faber* è da considerarsi di pari dignità di quello dell'*Homo sapiens*. Per questo nel suo opuscolo delle lezioni al Corso di aggiornamento dei docenti professionali, col pretesto di ricavarne il soggetto per un problema, aveva riportato per educare gli animi, oltre che istruire la mente, il testo della lapide posta nel cortile dell'Università di Padova:

Dal 1938 al 1942 — muratori e manovali padovani — in 150.000 giornate lavorative — costruirono e rinnovarono — dalle fondamenta — queste auguste case di Minerva — gli studenti nell'Ateneo — ricordino ed onorino — con il lavoro dell'intelletto — tanta nobile sudata fatica.

Poiché credo nell'insegnamento di S. Agostino, che un morto non è morto se la sua presenza è in noi, lasciate che mi rivolga per un momento a Gianni per dirGli: Caro Gianni, nel dedicarmi una Tua opera nel Natale del 1982 Tu scrivesti: «All'amico Carlo confidando nella sua benevolenza». Le stesse parole ora io rivolgo a Te: hai sentito le mie parole, confido nella Tua benevolenza, perché se le mie parole sono state inadeguate, inadeguato non è il sentimento che le ha ispirate.

Con questo stesso sentimento rinnovo il più vivo cordoglio per la scomparsa da questa vita terrena dell'indimenticabile amico Gianni, e rinnovo le più commosse condoglianze alla gentile Signora Marina e ai suoi Figli.

Testimonianza di Rolando Rigamonti

Nel pomeriggio di uno dei primi giorni del luglio 1970 il Corpo Accademico del Politecnico era riunito per l'elezione del Rettore, a seguito dell'improvvisa scomparsa del prof. Capetti. Due erano i candidati: il prof. Giovanni Jarre, portato da un gruppo di colleghi, e chi vi parla, che controvoglia (ormai posso dirlo)! cedendo alle pressioni di un altro gruppo aveva accettato di presentarsi.

Jarre si era preparato coscientemente a quel momento ed aveva scritto il suo programma in una decina di pagine che lesse al Corpo Accademico.

Quando, terminato lo scrutinio, risultò che, per bontà della maggioranza dei colleghi, io ero stato prescelto, Jarre, con molti spirito sportivo, pubblicamente mi augurò buon lavoro ed aggiunse: «Rigamonti, ti faccio omaggio del mio programma» e mi porse il suo manoscritto, che mi fu prezioso.

Per tale suo gesto, e per mostrare, a coloro che non mi avevano votato, che apprezzavo il loro candidato, qualche giorno dopo chiesi a Jarre se volesse fare il prorettore. Egli accettò senza riserve. Successe però che, anziché essere io ad aver bisogno del suo aiuto, fu lui che si rivolse a me più volte per parlarmi del Collegio Universitario.

Infatti, il prof. Renato Einaudi era ancora presidente di tale istituzione; aveva però, per motivi di salute, lasciato Torino da sei anni, trasferendosi a Pisa, alla cattedra di meccanica razionale di quella Università. Non potendo perciò seguire giornalmente l'andamento del Collegio, ne aveva affidata la cura al prof. Jarre.

Ma purtroppo, nel 1969-70 era scoppiata la contestazione studentesca, che dagli Atenei aveva raggiunto il Collegio, e Jarre dovette sopportarne l'urto.

Fu un urto violento, con occupazioni del Collegio che obbligarono anche a far intervenire la polizia. Jarre se ne preoccupò moltissimo, cercando tutti i modi per accontentare, entro i limiti del possibile, le richieste degli studenti: accolse certe richieste di miglioramento delle mense; cercò di ospitare un maggior numero di studenti nelle sezioni del Collegio, acquistando sacchi a pelo e letti e scovando posti ove sistemarli, sia pure senza tutte le comodità di una camera singola; giunse a mettere a disposizione altri posti letto presso l'albergo San Silvestro, sito in piazza

Statuto ed ora scomparso, tramite una convenzione con l'amministrazione del medesimo.

Jarre veniva spesso a parlarmi di questi suoi problemi, che lo assillavano ed ai quali dedicava con passione tutta la sua attività, e mi chiedeva se faceva bene a compiere certi passi, a prendere certe decisioni; c'era in lui una continua preoccupazione per far rispettare l'ordine delle istituzioni e nel contempo cercar di soddisfare certe richieste degli studenti, che riconosceva giuste. Andammo anche, insieme, qualche volta, a parlare al prof. Einaudi all'albergo Suisse (ora anch'esso scomparso, presso la Stazione), dove egli alloggiava quando veniva a Torino.

Ma gli studenti non capirono (o non vollero capire!) lo sforzo che Jarre faceva per venire loro incontro, e questa misconoscenza destò nel suo animo una profonda amarezza, che si ripercosse sulla sua salute.

Mi accorsi, che il suo spirito stava vacillando e perdendo il controllo di se stesso, una sera, dopo cena; eravamo da poco usciti dal Suisse, dopo un incontro con il prof. Einaudi e, ritornando verso casa, stavamo ancora discutendo dei problemi del Collegio e di come risolverli, quando improvvisamente, preso da un impeto di riconoscenza, mi disse: «Rigamonti, ti ringrazio del tuo aiuto; lascia che ti abbracci» e compì tale gesto.

Questo episodio, e le circostanze in cui avvenne, mi colpirono profondamente e mi fecero in un lampo vedere quanto dolore avesse provocato in lui, e lo avesse sconvolto, l'ingratitudine di coloro che cercava di aiutare, e con quanto abbandono egli si attaccasse a chi gli dava una mano.

Poco dopo, il suo stato depressivo era tale da costringerlo a parecchi mesi di riposo.

Ritornò più tardi al suo lavoro al Politecnico; al Collegio la contestazione era finita e nel 1972 era subentrato un nuovo presidente, l'ing. Gino Castelnuovo. Sopraggiunse però alla fine del 1973, una nuova disposizione legislativa, in virtù della quale il prorettore entrava a far parte di diritto del Consiglio di Amministrazione dell'Ateneo.

Jarre partecipò, così, a qualche seduta del Consiglio; ma un giorno venne a trovarmi ed a dirmi che non si sentiva di affrontare le questioni amministrative sulle quali il Consiglio doveva discutere e deliberare, e mi pregava pertanto di accettare le sue dimissioni dalla carica di prorettore che gli avevo affidato.

Sembrava, dalle sue parole, che avesse perfino timore di affrontare tali questioni. Forse era il ricordo, ancora cocente, di quanto aveva sofferto al Collegio; o forse era il desiderio, od il proposito, di tornare ad interessarsi pienamente della rieerca e degli studenti, di quegli studenti

per il bene dei quali aveva agito al Collegio e, prima ancora, in occasione della riforma del 1960 degli studi di ingegneria, quando aveva dedicato molto del proprio tempo ad una revisione meticolosa dei curricula degli allievi, affinchè molti potessero laurearsi già nell'anno accademico 1960-61 con i nuovi titoli accademici, come vi dirà più diffusamente tra breve il prof. Buzano.

Non riuscii a dissuaderlo dalla sua idea di dimettersi da prorettore: così lo persi come collaboratore; non però come amico, ed è per tale motivo che ho accettato di ricordarlo con questo mio breve intervento.

Testimonianza di Pietro Buzano

Gli interventi precedenti hanno già messo ampiamente in luce le Sue doti di scienziato, di docente, di uomo: perciò mi limiterò al ricordo di tre particolari momenti di miei rapporti con Giovanni Jarre.

1948. Giunto da poco al Politecnico (proveniente nel '45 dalla Facoltà di Scienze) mi trovo costretto con tutti i Colleghi nell'unica sede del Valentino dove quello che dovrei chiamare «il mio Istituto» consta di una sola stanza con qualche scaffale i cui vetri sono sostituiti da fogli di compensato. Un tramezzo sottile separa quella stanza da un'aula attigua dove tiene le sue lezioni Giovanni Jarre: la sua voce sonante supera quella barriera e giunge fino a me, che mi trovo ad ascoltarlo — prima involontariamente — ma poi sempre più attratto dal suo modo brillante, ma profondo, di affrontare difficili argomenti di meccanica. Così in certo senso posso considerarmi anch'io «allievo» di Giovanni Jarre.

1958. Nell'inaugurare la nuova sede di corso Duca degli Abruzzi, il rettore Antonio Capetti annuncia la nomina di Jarre a professore straordinario di Aerodinamica: come tale Jarre è anche segretario del Consiglio di Facoltà per il triennio 58-61 che segna una svolta importante nell'ordinamento degli studi di ingegneria. Infatti sta per arrivare in porto il progetto di riforma elaborato da una commissione presieduta dal prof. A. Capocaccia.

Il 31 gennaio '60 esce il D.P.R. col nuovo ordinamento che reca importanti novità: corso di studi quinquennale in tutte le sedi, istituzione di nuove lauree (in luogo delle tre sole preesistenti: civile, industriale, mineraria), possibilità per le Facoltà di attivare indirizzi, alleggerimento degli sbarramenti. Jarre si mette all'opera per adeguare al D.P.R. il nostro Statuto: già il 22 marzo '60 una prima bozza è all'esame della Facoltà, che affida a Jarre la stesura definitiva, approvata il 15 maggio '60. Il novembre successivo vengono definite le norme transitorie. A Jarre il compito di ricostruire le carriere scolastiche degli studenti optanti per il nuovo ordinamento: gli siamo a fianco io e qualche altro Collega, ma Jarre assume in prima persona l'onere maggiore e lo assolve con tanto impegno che, nella sede torinese, l'opzione risulta totalitaria e con piena soddisfazione degli studenti.

1968. Sono stato chiamato da poco alla Presidenza della Facoltà di Ingegneria quando nel marzo '68 esplode anche da noi la contestazione studentesca che già covava in altri Atenei. Il 4 marzo '68 gli studenti avanzano richieste che alcuni Colleghi giudicano pesanti: formazione di commissione consultive, istituzione dei semestri, modifiche di Statuto che diano luogo a maggiori possibilità di scelte individuali. Il Ministero si mette in disparte con una circolare che dice e non dice, concede e non concede. Io propongo alla Facoltà di accogliere nei limiti del possibile le richieste degli studenti, essenzialmente per dar prova che non intendiamo trincerarci dietro formalismi procedurali. Così il 28 marzo il Consiglio decide di procedere sollecitamente a modifiche di Statuto: ma è una decisione sofferta per vari docenti che ne sono poco convinti. In tale delicata situazione Jarre fa parte di un gruppo di Colleghi che si schierano al mio fianco sorreggendomi con la loro approvazione e coi loro consigli. Anche per questo appoggio io gli confermo oggi la mia riconoscenza.

Testimonianza di Sandra Oggiano

Desidero ricordare il prof. Jarre, che per 14 anni è stato Direttore del Centro Studi sulla Dinamica dei Fluidi del CNR e la cui improvvisa scomparsa è stata per tutti noi, ricercatori e tecnici del Centro, una perdita tanto più dolorosa in quanto inaspettata.

Cercherò di improntare il mio intervento alla brevità, e questo non già perché non abbia di Jarre molti ricordi, ma per rendere omaggio al carattere essenziale della Sua personalità, e cioè l'assenza di retorica.

Chi ha conosciuto il prof. Jarre ricorda certamente come egli fosse la negazione della prolissità: un discorso di Jarre era generalmente breve perché egli rispondeva alle domande rivoltegli prima ancora che queste venissero completamente formulate.

Di una grande lucidità di pensiero egli prevedeva talora anche la possibile, ulteriore risposta del suo interlocutore, cosicchè quest'ultimo percepiva immediatamente il fascino di un modo così intelligente di comunicare.

Questa caratteristica, quando il discorso si trasferiva sul piano scientifico, poteva rappresentare anche una notevole difficoltà per il suo interlocutore; si trattava di allenare il cervello ad un grado di elasticità sufficiente per poter cogliere in questo suo rapido dialogare l'enorme densità di informazioni che vi erano contenute.

Entrando nell'ufficio del prof. Jarre sono sempre stata colpita dalla grande varietà di testi che occupavano, disordinatamente, la sua scrivania e che spaziavano nei vari campi dell'ingegneria manifestando come un bisogno di rinnovarsi intellettualmente studiando a fondo certi temi sui più svariati argomenti, disinteressandosi completamente (o quasi) dell'aspetto utilitaristico costituito da prospettive di pubblicazioni o di presentazioni a congressi ed esprimendo piuttosto il desiderio di allargare le proprie conoscenze e soddisfare le proprie curiosità, quasi una implicita esortazione a perseguire lo studio come fine a se stesso.

E proprio questa molteplicità di interessi permetteva al prof. Jarre di inquadrare i più vari problemi con immediatezza, esprimendo al riguardo giudizi rapidi ed essenziali, ma sempre precisi (ed a volte pungenti) sia sulle persone che su una certa maniera piuttosto superficiale di condurre la ricerca.

Soprattutto negli ultimi anni mi è parso che il prof. Jarre fosse costretto

dai molti impegni a cui non si era potuto sottrarre, a lottare per conquistarsi lo spazio necessario per approfondire i propri campi di interesse, lontano comunque e sempre da una cultura prefabbricata o improntata alla moda del momento.

Ora che non sentiamo più risuonare il suo passo affrettato per i corridoi del Politecnico, quella sua eterna fretta pare colorarsi nel nostro ricordo di un triste significato, quasi presagisse per le molte cose che egli aveva ancora da dire e da fare il pochissimo tempo a sua disposizione.

A noi tutti del Centro Studi rimane il rimpianto per quello che il nostro Direttore avrebbe ancora potuto insegnarci.

Testimonianza di Vittorio Marchis

Incontro Gianni Jarre — e con questo intendo dire ho incominciato a conoscerlo — intorno ai primi anni 80 quando due fatti concorrono, in maniera alquanto fortuita: il dibattito sulla formazione del Dipartimento che avrebbe dovuto nascere dal vecchio Istituto di Meccanica Applicata, Aerodinamica e Gasdinamica, e la preparazione della mostra su Alberto Castigliano.

Io, allora, sono semplicemente un apprendista nel difficile mestiere dell'universitario, e Gianni Jarre (che un po' assomiglia nell'aspetto a Prospero Richelmy, professore di idraulica, uno degli artefici di questo Politecnico più di un secolo fa) subito ha molte cose da raccontarmi ed insegnarmi.

Non vorrei essere travisato, ma ci troviamo quasi l'uno come l'apprendista, l'altro lo stregone. L'ingegneria sì: i lunghi discorsi, di vivaci dialoghi, sulla termodinamica dei gas, sul «tirare a secco» l'aria degli impianti frigoriferi, sempre un caloroso, epidermico aggancio con la realtà, con la fisica dei tecnici e degli artigiani, con la «geometria dei piastrellisti», con la simmetria dei cristalli e delle varie maniere di sezionare un cubo; la complicità con cui un sabato riusciamo a convincere un anziano soffiatore di vetro dell'Istituto di Chimica a costruirci — vera e di vetro — una bottiglia di Klein, sino ad allora vista solamente sui libri.

Ho parlato dell'ingegneria, ma non solamente... L'arte, che forse invidiava in altri che gli erano vicini, la letteratura, da cui era più schivo e di cui ebbi solo fugaci lampi, la storia in cui ritrovava l'entusiasmo del detective.

Il 6 ottobre dell'anno scorso, di sera, ancora discutevamo delle vicende, peraltro oscure e ambigue, di un fuoriuscito piemontese che Babbage si portò a Torino, a quando fu invitato a Corte, nella prima metà dell'800. La storia di Antonio Prandi è ancora tutta da scrivere...

Di queste brevi note, l'Accademia delle Scienze è una delle quinte, forse anche gran parte del fondale. Nell'Accademia, che ho imparato a conoscere come timido frequentatore introdotto proprio dal professor Jarre, ho scoperto, anche tra gli scaffali polverosi e sui pavimenti che i recenti restauri avevano denudato lasciando libere le volte, le molte facce del sapere e della scienza e i tortuosi sentieri del suo rinnovamento.

Con la Mostra del Bicentenario dell'Accademia lavoriamo di nuovo

assieme a lungo, ma sempre separatamente, per poi discuter animosamente alla sera delle congetture e dei parziali risultati raggiunti. Molti dei problemi, e non solo storici, che quasi per sfida Gianni Jarre mi propose, devo ancora affrontarli.

Gianni più volte mi esternò la sua soddisfazione nel rileggere i necrologi — i più belli — degli accademici illustri, che ricevevano l'onore del ricordo. Questa giornata è stata pensata anche in questo senso.

Il ricordo e la fantasia spesso camminano insieme. Per chi è vissuto accanto a Gianni Jarre, me lo auguro di cuore, avranno un significato tutto particolare nomi come Giannone, Zumstein, Quintino Sella, Germano Sommeiller, Diodata Saluzzo, il padre Beccaria, Plana, Carlo Ignazio Giulio, ma anche Vito Volterra, Sclopis, Bepi Colombo e molti altri che ora non ricordo.

Oscillazioni, instabilità e caos

Silvio NOCILLA*

Riassunto. *Vengono richiamati brevemente i concetti basilari relativi alle oscillazioni non lineari, alla stabilità e all'instabilità. Vengono poi presentati i moti caotici, segnalando difficoltà concettuali e problematiche inerenti alla loro comprensione, e mostrando con esempi la loro struttura e la loro formazione.*

Summary. *The basic concepts regarding the nonlinear oscillations, the stability and unstability are briefly recalled. The chaotic motions are then introduced, indicating conceptual difficulties and problems for understanding them, and showing with examples their structure and formation.*

1. Vibrazioni e stabilità secondo Liapounov

Si legge nei testi di storia della scienza che Galileo, osservando nel duomo di Pisa le oscillazioni dei lampadari appesi al soffitto, abbia scoperto la legge dell'*isocronismo* secondo cui il periodo delle oscillazioni non dipende dalla loro ampiezza. Nella prima giornata del «*Dialogo delle nuove scenzie*» Galileo fa pronunciare a Salviati queste testuali parole: «Però notate: slargato il pendolo del piombo, v.g., cinquanta gradi dal perpendicolo e di lì lasciato in libertà, scorre, e passando oltre al perpendicolo quasi altri cinquanta, descrive l'arco di quasi cento gradi, e ritornando per se stesso indietro, descrive un altro poco minore arco, e continuando le sue vibrazioni, dopo gran numero di quelle si riduce finalmente alla quiete. Ciascheduna di tali vibrazioni si fa sotto tempi eguali, tanto quella di cinquanta, di venti, di dieci e di quattro; ...»

Oggi scriviamo in forma quantitativa tale legge nel modo seguente:

$$T = T_o = 2\,\pi\sqrt{l/g} \qquad (1)$$

essendo l la lunghezza del pendolo e g l'accelerazione di gravità.

---

* Dip. di Ing. Aeronautica e Spaziale, Politecnico di Torino, C.so Duca degli Abruzzi, 24, 10129 Torino, Italia.

Oggi sappiamo anche che strettamente parlando tale legge è vera solo al limite quando l'ampiezza ϑ_1 delle oscillazioni tende a zero poiché la legge rigorosa (in assenza di forze passive) è rappresentata nel grafico di Fig. 1, che presenta tangente orizzontale nell'origine, ed un asintoto verticale per $\vartheta_1 = \pi$. Questa osservazione fondamentale di Galileo può essere considerata l'atto di nascita della meccanica delle vibrazioni. Sappiamo oggi che i sistemi dinamici lineari posseggono tanti *periodi propri* di vibrazione $T_r (r = 1, 2, \ldots, n)$ quanto è il numero n di gradi di libertà del sistema, ed il calcolo di tali periodi (o dei loro inversi, le *frequenze proprie*) è il primo compito dell'analisi modale, capitolo della meccanica di grandissima attualità e importanza.
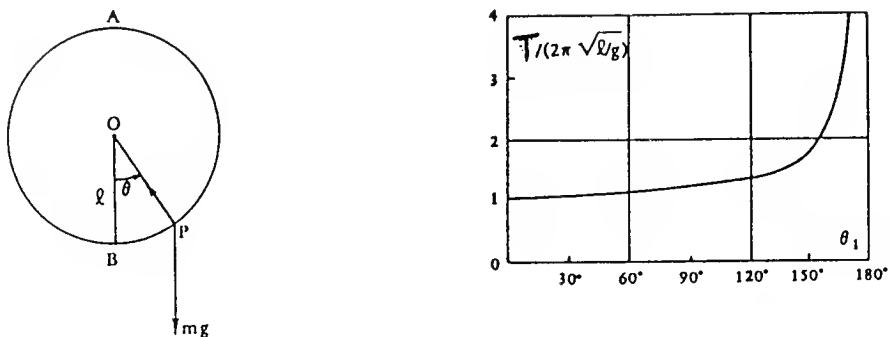
Fig. 1

Nei sistemi non lineari l'analisi modale diventa molto più complicata perché, come già osservato in Fig. 1 per $n = 1$, non abbiamo più n frequenze ben distinte, bensì n frequenze dipendenti in modo essenziale dalle ampiezze di vibrazione delle diverse coordinate lagrangiane $q_r (r = 1, 2, \ldots, n)$ che caratterizzano istante per istante la configurazione del sistema. Inoltre queste vibrazioni non sono più sinusoidali come nel caso lineare, ma, nella ipotesi che siano periodiche, posseggono una loro specifica *forma d'onda*, che dal punto di vista analitico può essere espressa mediante serie di Fourier, ossia somma di infinite armoniche con frequenze crescenti in progressione aritmetica. Sono molto espressive le seguenti rappresentazioni di un moto periodico $x(t)$, v. Fig. 2:

a) sul *piano delle fasi* $(x, \dot{x})$
come linee caratteristiche chiuse in se stesse;

b) come *spettro di Fourier*
discreto con frequenze in progressione aritmetica;

c) come *mappa di Poincaré*
ossia dall'insieme dei punti sul piano delle fasi corrispondenti ad istanti $t_h = t_o + h\,T (h = 1, 2, \ldots)$ intervallati di un periodo T. Nel *moto periodico la mappa di Poincaré è costituita da un solo punto.*
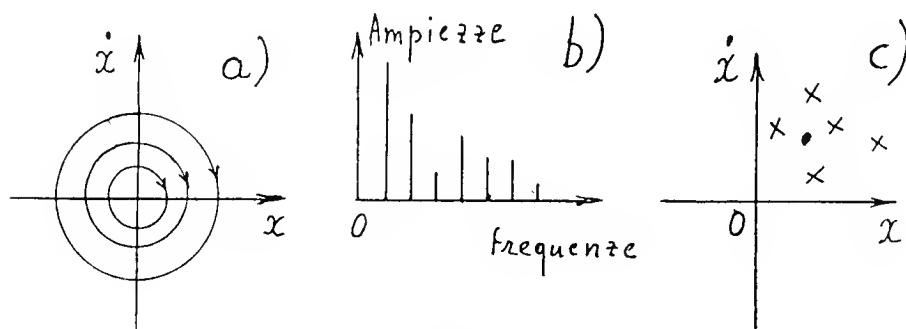
Fig. 2

Se il moto è *quasi-periodico* lo spettro di Fourier è ancora discreto, ma le frequenze non sono più in progressione aritmetica.

Se il moto vibratorio *non* è periodico, le caratteristiche sul piano delle fasi non sono più linee chiuse, lo spettro di Fourier è continuo, e la mappa di Poincaré è costituita da un insieme più o meno disordinato di punti. Soprattutto nei *moti caotici* la mappa di Poincaré costituisce uno strumento assai valido di osservazione e di studio.

L'ambiente naturale per una visione completa dei moti di un sistema con n gradi di libertà è lo *spazio delle fasi* con $2n$ dimensioni e coordinate $(q_1, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$. Proprio in tale spazio delle fasi si introduce il concetto fondamentale di *stabilità secondo Liapunov*, ossia rispetto ai dati iniziali, mediante il procedimento seguente, vedi ad es. [2]. Sia:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t), \quad \underline{x} \in R^m \tag{2}$$

l'equazione del moto del sistema, e:

$$\underline{x} = \underline{x}_o \tag{3}$$

il valore assunto da $\underline{x}$ all'istante iniziale, e sia $\underline{x}_e$ un punto di equilibrio della (2), ossia un vettore costante tale che:

$$(4) \qquad \underline{F}(\underline{x}_e, t) = 0, \quad \forall\, t \geqslant t_o .$$

Si pone la seguente *definizione di stabilità*. Il punto di equilibrio $\underline{x}_e$ è *stabile qualora dato ad arbitrio un numero positivo* ϵ *piccolo a piacere è possibile trovare un* δ *tale che*

$$(5) \qquad \text{se } \| \underline{x}_o - x_e \| < \delta \quad \text{allora} \quad \| \underline{x}(t) - \underline{x}_e \| < \epsilon, \quad \forall\, t \geqslant t_o .$$

La norma $\| . \|$ che interviene nella definizione è solitamente la norma euclidea:

$$(6) \qquad \| \underline{x} \| = \sum_{r=1}^{m} x_r^2$$

ma può essere scelta in modo diverso a seconda dei casi.

Il profondo significato fisico di questa definizione di stabilità sta nel fatto che in realtà nei problemi dinamici i dati iniziali sono sempre affetti da qualche incertezza, e possono fluttuare entro certi limiti, peraltro molto ristretti di regola. Per un effettivo controllo del fenomeno è essenziale essere certi *a priori* che pur in questa situazione di incertezza dei dati iniziali le traiettorie dinamiche nello spazio delle fasi si mantengono sempre prossime al punto di equilibrio $\underline{x}_e$, al crescere del tempo fino all'infinito. Più precisamente si vuole essere certi che tali traiettorie dinamiche si mantengono sempre interne ad una ipersfera di centro $\underline{x}_e$ e raggio ϵ arbitrariamente piccolo. *Quale prezzo si deve pagare per avere questa certezza?*

Nei punti di equilibrio stabile secondo Liapunov il prezzo è invero molto modesto, perché basta che i dati iniziali $\underline{x}_o$ stiano anch'essi dentro un'ipersfera di centro $\underline{x}_e$ e raggio δ, di regola dipendente d ϵ.

È importante osservare che in questa definizione:

1) nessun'altra condizione è richiesta ai dati iniziali $\underline{x}_o$, i quali pertanto sono delle *costanti arbitrarie*, purché interni all'ipersfera di raggio δ.
2) Nessun'altra condizione è richiesta alle traiettorie dinamiche fuorché di restare contenute nell'ipersfera di raggio ϵ al passare del tempo. Dentro questa specie di *cappello di Liapunov* è consentito alle traiettorie dinamiche di fare tutto quello che vogliono, di avere anche

i comportamenti più bizzarri, senza che con questo venga intaccato, per definizione, il carattere di stabilità del punto di equilibrio.

Esistono però dei casi, anche molto semplici, in cui pur pagando il prezzo suddetto non è possibile raggiungere lo scopo di costringere le traiettorie dinamiche a stare entro una ipersfera di raggio arbitrariamente piccolo. Entriamo allora nel campo minato della *instabilità*. Un esempio tipico è dato ancora dal pendolo, nella configurazione di equilibrio $\vartheta = \pi$, punto più alto A. Basta infatti uno spostamento, o una velocità iniziale, piccola fin che si vuole a partire da A perché il punto P si allontani di quantità (e con velocità) *non* arbitrariamente piccole.

Se il sistema è conservativo, con potenziale $U(q_l, \ldots, q_n)$, è ben noto il *teorema di Dirichlet* che fornisce una *conduzione sufficiente per la stabilità nel senso sopra precisato. Precisamente posto:*

$$(7) \qquad x_r = q_r - \bar{q}_r; \quad x_{r+n} = \dot{q}_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

dove le $\bar{q}_r$ sono i valori delle q_r in condizioni di equilibrio statico, allora il *punto di equilibrio* $\underline{x}_e = 0$ è stabile secondo Liapunov se in corrispondenza dei valori $\bar{q}_r$ il potenziale U presenta un massimo effettivo.

Se in luogo del potenziale U si introduce l'*energia potenziale*:

$$(8) \qquad W = -U$$

si avrà *stabilità nei punti di minimo.*

Nel caso del pendolo l'energia potenziale $W(\vartheta)$ vale:

$$(9) \qquad W(\vartheta) = -mgl \cos \vartheta$$

ed ha l'andamento indicato in Fig. 3a con *minimo in B* ($\vartheta = 0$, equilibrio stabile) e *massimo in A* ($\vartheta = \pi$, equilibrio instabile).

È interessante e utile per lo studio dei moti caotici un'altra forma di energia potenziale $W(x)$, con un massimo e due minimi adiacenti, che rappresenta una doppia buca di potenziale, v. fig. 3b.

Accenniamo infine ad un ulteriore, fondamentale aspetto della stabilità o instabilità. Supponiamo che un sistema dinamico del tipo (2) ammetta una certa soluzioine $x = \bar{x}(t)$. Supponiamo poi che tale situazione venga *perturbata* modificando i dati iniziali, e sia:

$$(10) \qquad x = \bar{x}(t) + \delta \bar{x}(t)$$

la soluzione perturbata. Quale comportamento presenta la perturbazione

$\delta \bar{x}(t)$ al crescere del tempo t? Anche qui si tratta di introdurre un'op-
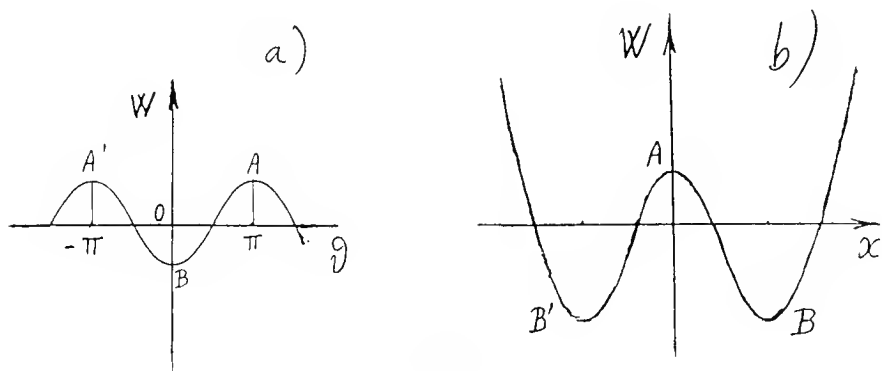
Fig. 3

portuna norma per $\delta \bar{x}(t)$, e di investigare in quali condizioni essa si mantiene arbitrariamente piccola, o comunque limitata, o addirittura tende a zero per $t \to +\infty$. Se la $\bar{x}(t)$ è periodica ci si riconduce allo studio di *equazioni a coefficienti periodici*, come ad esempio l'equazione di Mathieu:

(11) $$\ddot{x} + (\lambda + \mu \cos \omega t) x = 0$$

le cui soluzioni possono avere comportamenti del tutto diversi per $t \to +\infty$, a seconda dei valori assunti da λ e μ.

2. L'instabilità

Le due tipiche configurazioni di equilibrio del pendolo, o della doppia buca di potenziale, evidenziate nel numero precedente in A e in B, possono anche essere riguardate nel modo seguente.

Ammettiamo, come ipotesi di lavoro, che le traiettorie dinamiche sul piano delle fasi $(x, \dot{x})$ possano essere contenute in cerchi, con centri rispettivamente $(x_A, 0)$ e $(x_B, 0)$, di raggio arbitrariamente piccoli, e quindi che sia lecita la linearizzazione dell'equazione del moto nella forma:

(12A) $\ddot{y} - a^2 y = 0$ in prossimità di A, con $y = x - x_A$

(12B) $\ddot{y} + b^2 y = 0$ in prossimità di B, con $y = x - x_B$

Queste equazioni ammettono le soluzioni semplici

(13) $y = e^{\pm at}$ in A; $y = e^{\pm ibt}$ in B

e pertanto *nel caso stabile B* le traiettorie dinamiche, in forma di ellisse, sono certamente racchiudibili nel cerchio suddetto, purché i dati iniziali siano contenuti in un conveniente intorno del suo centro. Dunque l'*ipotesi di lavoro era corretta e la linearizzazione lecita*, nel senso che fornisce un modello corretto del fenomeno. *Viceversa nel caso instabile A*, essendo l'esponenziale reale e^{at} divergente per $t \to +\infty$, *non* è possibile trovare un intorno di $(x_A, 0)$ tale che qualora i dati iniziali siano contenuti in esso le corrispondenti traiettorie dinamiche stiano *tutte* rinchiuse in un cerchio di *raggio finito*. Dunque in tal caso l'*ipotesi di lavoro non era corretta, e la linearizzazione non è lecita*, perché fornirebbe un modello del fenomeno in contraddizione con l'ipotesi fatta per ricavarla.

Le cose poi si complicano nei casi con più gradi di libertà in cui il potenziale può, in un suo punto di stazionarietà, non essere né massimo né minimo (v. ad esempio i punti di sella).

Ci troviamo di fronte ad una prima domanda, solo apparentemente banale. Un punto di equilibrio *non stabile* è *instabile*? Una risposta adeguata richiederebbe ulteriori approfondimenti, che qui non possono trovare spazio. Bisognerebbe dare una definizione *in positivo* del concetto di instabilità, diversa dalla negazione della stabilità. Pur tuttavia osserviamo che l'elemento chiave della discussione precedente è che nel caso della stabilità ci troviamo di fronte a soluzioni esponenziali con esponenti caratteristici immaginari puri $\pm ib$; nel caso della instabilità con un esponente positivo $+a$. Basta la presenza *anche solo di un esponente caratteristico positivo, o meglio con parte reale positiva*, perché tutto il castello della stabilità crolli, nel senso che perturbazioni piccole fin che si vuole dalla configurazione di equilibrio $\underline{x}_e$ portano nello spazio delle fasi a punti infinitamente lontani da $\underline{x}_e$ *per* $t \to +\infty$. L'esponente caratteristico con parte reale positiva ha dunque il ruolo di *amplificatore infinito di perturbazione*. Di questa situazione si accorge anche il «computer» cui venga affidato il compito di integrare numericamente il sistema dinamico in esame, segnalando «*overflow*».

Per porsi al riparo da questi guai si assume solitamente come criterio sicuro per la stabilità quello che *tutti gli esponenti caratteristici abbiano parte reale negativa*. In questo contesto giuoca un ruolo basilare il *criterio di Routh e Hurwutz*.

In tutto quanto detto finora sulla instabilità giova ancora osservare che è necessario avere a che fare con soluzioni di tipo esponenziale, pre-

senti soltanto nei sistemi lineari. Nel caso non lineare, se è possibile ricondursi in forma approssimata alla stessa situazione, si parla in *instabilità locale*. Possono però presentarsi situazioni del tutto nuove, come quella del *ciclo limite*, di cui un esempio significativo è dato dall'equazione di Van der Pol:

$$\ddot{x} - \mu (1 - x^2) \dot{x} + x = 0 \quad (\mu > 0) \tag{14}$$

L'origine nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$ è localmente instabile; però per $t \to +\infty$ le caratteristiche non vanno all'infinito, ma tendono ad una speciale linea chiusa, anch'essa earatteristica, detta appunto ciclo limite, v. Fig. 4.
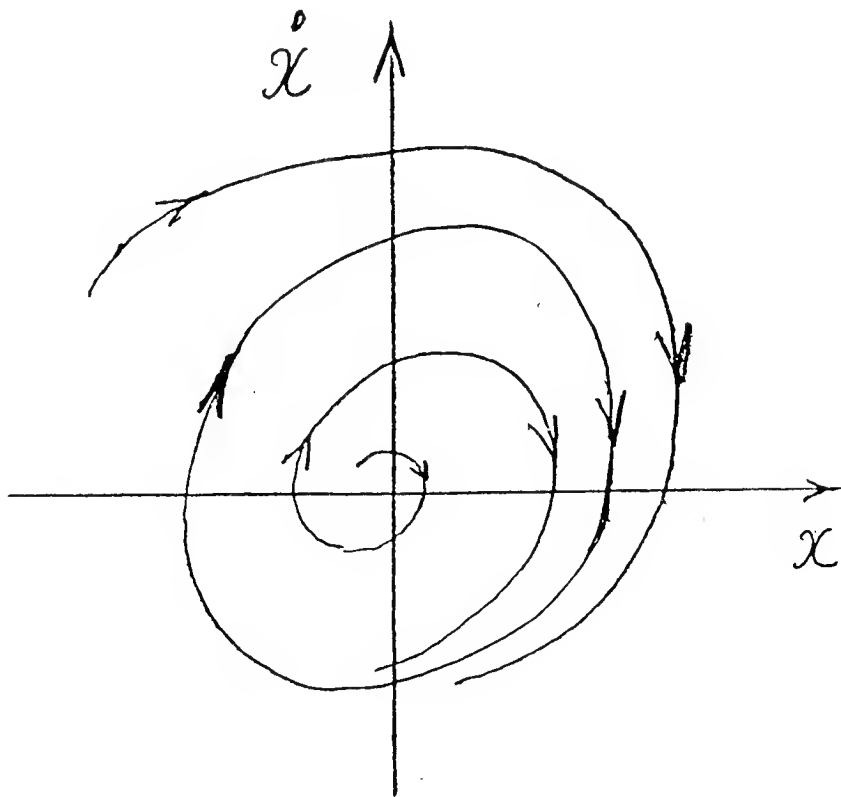
Fig. 4

3. Il caos questo sconosciuto

Io non so se abbia molto senso accingersi a spiegare cosa sono i moti caotici, cioè cercare di esporre con la razionalità e la chiarezza necessarie per trattare un argomento scientifico, dei fatti e dei concetti che si presentano come negazione di razionalità e chiarezza. Sfogliando la letteratura sul «caos» copiosissima in questi ultimi tempi, si avverte l'esigenza di *segnalare* una tematioca sconcertante, se pur tanto viva e interessante, mettendo però in guardia il lettore dall'illudersi di avere *capito* cosa sia veramente il caos dopo la lettura dei lavori ad esso dedicati. Così ad esempio nell'articolo di apertura del volume «Directions in Chaos» [3, Vol. 1°], di J. Ford, dal titolo «Directions in classical chaos», leggiamo: «in questo articolo noi cercheremo di indirizzarci alle conseguenze fondamentali che si ottengono rispondendo alle questioni globali: 'Cos'è il caos... Cosa significa... Chi ne ha bisogno... A quale scopo serve?...' Specificamente noi pensiamo che rispondendo definitivamente a queste "*unsolved questions of the past*" noi possiamo facilitare il nostro viaggio nel futuro.

Tuttavia, risposte non ambigue a tali quesiti possono essere accuratamente formulate solo se affrontiamo direttamente l'*antico paradosso relativo al problema di definire il caos*».

Una seconda citazione, tratta dalla prefazione del volume «Chaos and Complexity» [4] è la seguente: «Sebbene questi nuovi campi di ricerca non possano essere collocati nell'area ben definita della meccanica statistica, è pur evidente che *non esiste ancora una chiara definizione di essi* in termini di comuni metodologie e concetti largamente applicabili».

Tuttavia nelle stesse fonti ora citate si trovano anche degli spunti atti a gettare qualche luce sulla comprensione dei fenomeni caotici. Infatti dice ancora J. Ford: «Per secoli la dinamica classica è stata riguardata come prevedibile deterministicamente; eppure l'esistenza del caos sembra richiedere che la dinamica classica produca anche dei comportamenti imprevedibilmente vagabondi (*unpredictably erratic*). La grossolana e facile risoluzione di questo dilemma afferma che la imprevedibilità osservata del caos deriva dalla dipendenza esponenzialmente sensitiva dello stato finale dallo stato iniziale (esponenti di Liapunov positivi, metriche di entropia positive, o simili). Questo concetto di *dipendenza esasperata dai dati iniziali* viene peraltro discusso criticamente nel prosieguo dello stesso articolo. Viene però ripreso con maggiore fermezza da un articolo di S. Isola, contenuto nel già citato volume [4], dal titolo significativo «*Understanding complex behaviour. Some remarks on method and interpretation*». Si legge in tale articolo: «Le nonlinearità presenti nel

problema possono infatti produrre una estrema sensibilità rispetto allo stato iniziale del sistema, cosicché anche un piccolo errore nella sua conoscenza sarà amplificato esponenzialmente al crescere del tempo. Un *sistema con questa proprietà* (cioè *sensibile dipendenza dalla condizione iniziale*) *è caotico*: nonostante la sua natura deterministica esso subisce una sorta di perdita di memoria sulla sua storia passata, cosicché diventano impossibili previsioni precise sul futuro. Se un'evoluzione temporale caotica si avvicina asintoticamente ad un attrattore, allora questo attrattore diventa *strano*».

Dunque il caos viene presentato come *esasperata sensibilità ai dati iniziali, fonte di non-prevedibilità* nei sistemi dinamici non lineari, seppur deterministici. Questo concetto appare molto importante per chi studia il caos, tanto che la sua paternità viene attribuita a Poincaré, il padre della moderna impostazione di studio della meccanica. Si legge infatti, sempre nella prefazione del volume [4]: «Agli inizi di questo secolo H. Poincaré ha già osservato che una dinamica completamente deterministica non implica necessariamente esplicite predizioni sull'evoluzione di un sistema dinamico. Ciò può essere considerato una pietra miliare nell'approccio allo studio del *caso dinamico*».

Queste citazioni mi suggeriscono un commento personale, e precisamente la seguente domanda: *La suddetta esasperata sensibilità ai dati iniziali implica che la condizione di stabilità di Liapunov non sia soddisfatta?* La risposta affermativa, e cioè assenza di stabilità secondo Liapunov, si presenta come spontanea, d'accordo con l'impostazione logica del titolo della presente relazione, che propone il caos come figlio della instabilità. Una riflessione più attenta però può fare propendere anche per una risposta diversa. Infatti si può pensare a moti caotici, nel senso di esasperatamente dipendenti dai dati inziali, e pur tuttavia tali che nello spazio delle fasi siano costretti entro al «cappello di Liapunov». Il «cappello» non viene forato, purché i dati iniziali stiano in una conveniente sfera, ma dentro ad essa regna il disordine più completo, con dipendenza esasperata dai dati iniziali, cioè appunto il caos. In ogni modo però si deve tener presente che *nei moti caotici le dimensioni di questo «cappello» sono limitate, e non infinitamente grandi come per le instabilità del tipo descritto nel numero precedente.*

Ancora una osservazione di carattere generale. Gli studi più recenti hanno mostrato che per incontrare moti caotici non è necessario considerare sistemi complessi con molti gradi di libertà, ma bastano semplici sistemi con un solo grado di libertà. Bisogna però che essi presentino *grandi non linearità*, contrariamente a quanto veniva fatto per lungo tem-

po nello studio dei sistemi non lineari, di regola condizionati dalla presenza del «piccolo parametro» di non linearità.

Segnaliamo infine che una trattazione molto ampia ed interessante dei moti caotici, con ricca documentazione bibliografica, è stata effettuata nel luglio 1986 in un Corso CISM ad Udine, dal titolo: «Chaotic motions in non linear dynamical systems». Ad esso rimandiamo per sviluppi ed approfondimenti delle tematiche che qui possiamo soltanto accennare, spesso ispirandoci al Corso stesso.

Passiamo ora a mostrare con un esempio concreto come si manifesta la suddetta esasperata dipendenza dai dati iniziali, fonte di comportamento caotico, sia sotto forma di *time histories* sia sotto altre interessanti forme geometriche. L'esempio è tratto dal volume di Thompson [5], che riporta ricerche basilari di Ueda [6]. Si consideri l'equazione di Duffing (*non linearizzabile*):

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = B \cos t \tag{15}$$

Le sue soluzioni $x = x(t)$ dipendono in modo essenziale:
— dai dati iniziali $x = x_o$; $\dot{x} = \dot{x}_o$ per $t = 0$;
— dai parametri (k, B).

Un primo gruppo di risultati è ottenuto tenendo costanti (k, B) e facendo variare $(x_o, \dot{x}_o)$. L'equazione differenziale (15) viene integrata numericamente con l'ausilio del calcolatore che consente di ottenere una enorme quantità e varietà di risultati in tempi limitati e costi contenuti. Riportiamo qualche risultato. Attribuendo a (k, B) i valori:

$$k = 0.05; \quad B = 7.5 \tag{16}$$

e ai dati iniziali i valori molto prossimi tra loro:

$$\begin{cases} x_o = 3 \\ \dot{x}_o = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_o = 3.01 \\ \dot{x}_o = 4.01 \end{cases} \tag{17}$$

si hanno i diagrammi orari di Fig. 5, e sul piano delle fasi di Fig. 6. Appaiono ben evidenti:
— la complessità delle forme d'onda;
— la dipendenza dai dati iniziali, fonte di progressiva distorsione di tali diagrammi. La Fig. 7 indica come si genera la corrispondente mappa di Poincaré beccando stroboscopicamente dopo ogni periodo 2π i successivi punti *A, B, C,*... In Fig. 8 è riportata una mappa di Poincaré

ẋ(t)
2
0
-2
2π
10π
t
x_o = 3
ẋ_o = 4
x_o = 3.01
ẋ_o = 4.01

Fig. 5

ẋ
6
4
2
0
-2
-4
-6
-4
-2
0
2
4
x
x_o = 3
ẋ_o = 4
3.01
4.01
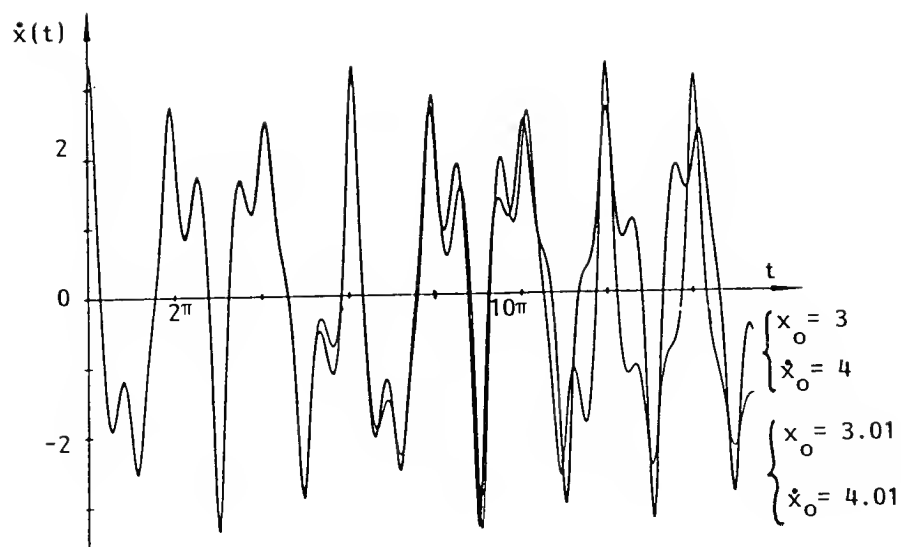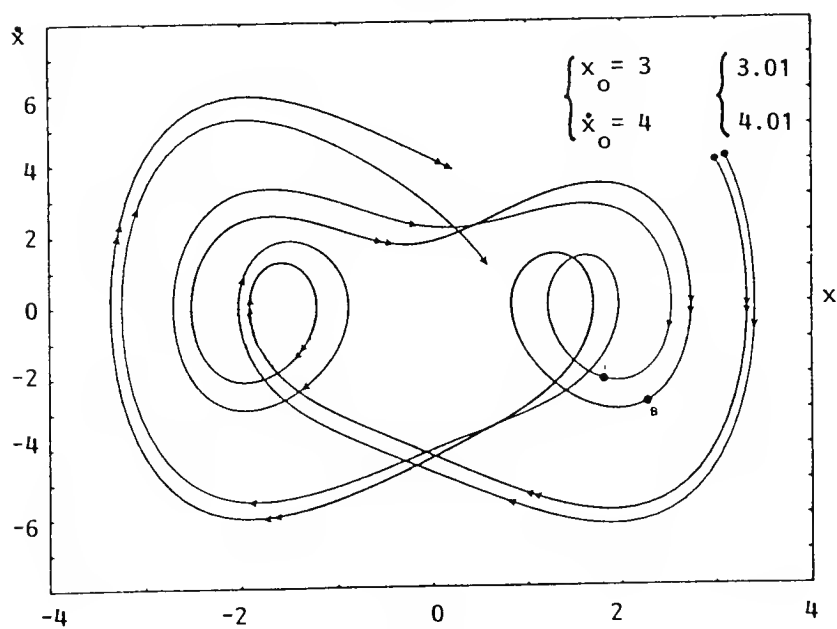
Fig. 6
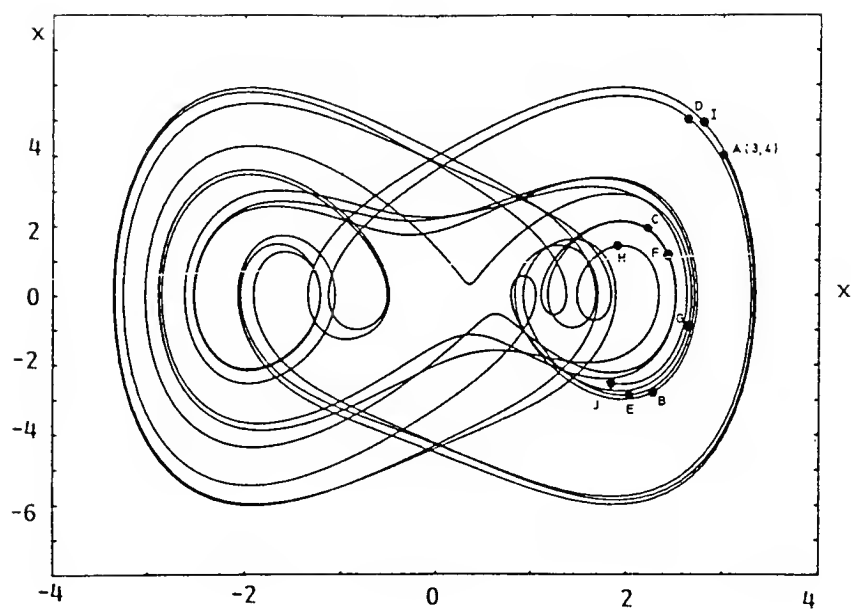
Fig. 7
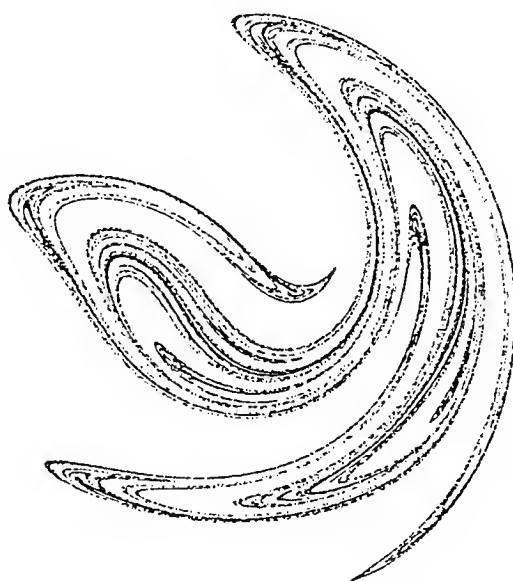
Fig. 8

finale, ottenuta mediante un numero grandissimo di cicli. Riguardo a quest'ultima osserviamo che si tratta di una struttura molto complessa, stratificata, conseguenza di ripetuti *stiramenti e ripiegamenti* (*stretching and folding*) dell'insieme delle traiettorie caotiche stazionarie. I punti che costituiscono la mappa si avvicendano in modo molto irregolare, ma non eccessivamente dispersivo, sempre con ascisse positive, costituendo quello che viene denominato «*strange attractor*» o «*chaotic attractor*», non privo di un certo carattere di varietà ed eleganza di figura. È difficile però dare una definizione rigorosa di tali attrattori. Nel volume già citato di Thompson [5] è detto anzitutto che è preferibile il termine di attrattore *caotico* anziché *strano*, e poi si precisa: «Un attrattore caotico può essere *definito* come un attrattore limitato che stira e ripiega il pacchetto (*bundle*) di traiettorie finali stazionarie, producendo sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali e imprevedibilità a lungo termine». Definizione espressiva ma certo non matematica.

Riguardo alle mappe di Poincaré per gli attrattori caotici c'è ancora da rilevare quanto segue. Già abbiamo osservato nel n. 1 che se il moto è periodico, ed il tempo impiegato nell'operazione stroboscopica è uguale al suo periodo, la mappa si riduce ad un solo punto, cioè una figura geometrica con *dimensione zero*. Se detto tempo è un sottomultiplo del periodo, come capita quando si è in presenza di risonanza subarmonica, la mappa si riduce ad una successione finita di punti che si sovrappongono ciclicamente. Se invece abbiamo un moto caotico i vari punti si susseguono in modo disordinato formando un insieme con struttura stratificata indefinitamente (*infinitely layered*), del tipo recentemente studiato in modo sistematico da Mandelbrot [7], il quale coniò per tali oggetti il termine di '*fractals*', sia a causa della loro struttura infinitamente '*broken*', sia perché, in base ai metodi matematici standard per la determinazione spaziale della dimensione di un arbitrario insieme di punti, si ottengono per i frattali valori non interi. Si ha cioè qualcosa di intermedio tra dimensione zero (un solo punto), dimensione uno (una linea), dimensione due (una superficie), etc. Non possiamo qui addentrarci in questo campo difficile della geometria, che trae radici dall'insieme di Cantor, che qualche decennio addietro era inteso da qualcuno come una «invenzione perversa» dei matematici.

Rivolgiamo invece molto velocemente la nostra attenzione ad un *secondo gruppo di risultati* ottenuti per l'equazione (15) facendo variare i parametri (k, B). Si tratta di distinguere, sul piano dei parametri (k, B), regioni diverse corrispondenti a comportamenti diversi delle sue soluzioni e precisamente:
— soluzioni periodiche con lo *stesso periodo della forzante*, dette soli-

tamente *armoniche*, anche se formate da diverse (infinite) armoniche vere e proprie;
— soluzioni periodiche con *periodo multiplo della forzante*, dette anche subarmoniche;
— soluzioni *caotiche*.

Questo tipo di indagine, a parte l'interesse concettuale e teorico, può anche avere significative applicazioni pratiche qualora l'equazione differenziale in studio sia il modello matematico di realtà fisiche o tecniche di cui i coefficienti dell'equazione costituiscono parametri di funzionamento o di progetto. Si riesce allora a prevedere per quali valori di tali parametri la situazione di caos si può presentare o no. La strada seguita di regola per queste indagini è lo studio delle *biforcazioni*, ossia il calcolo dei valori dei parametri in corrispondenza dei quali si ha un cambiamento radicale della struttura delle soluzioni, di pari passo con l'analisi delle strutture stesse. Nel caso dell'equazione [15], in base ai risultati di Ueda [6], il piano (k, B) viene suddiviso in modo assai complesso in molteplici regioni, talvolta con ricoperture parziali tra loro, caratterizzate ciascuna da una delle proprietà suddette. Non è qui posibile riportare e discutere tali interessanti risultati.

Segnaliamo invece un gruppo di ricerche sistematiche della Stupnicka [8] su equazioni ancora del tipo di Duffing, sia con che senza simmetria dispari in $(x, \dot{x})$. In particolare ricordiamo l'equazione non più simmetrica:

$$\ddot{x} + h\dot{x} + x^3 = P_0 + P_1 \cos \nu t \tag{18}$$

con:

$$P_1 = 0.16; \quad P_o = 0.03; \quad h = 0.05 \tag{19}$$

e riportiamo alcuni significativi risultati relativi alla *dipendenza delle soluzioni dalla frequenza dalla forzante* ν, in particolare al fondamentale fenomeno del '*period doubling*', spesso segno premonitore della transizione al caos. La Stupnicka cerca soluzioni subarmoniche della (18) del tipo:

$$x_o^{(2)}(t) = A_o + A_1 \cos \nu t + A_{\frac{1}{2}} \cos(\nu/2 + \varphi) \tag{20}$$

e determina i parametri incogniti $(A_0, A_1, A_{\frac{1}{2}}, \varphi)$ mediante bilanciamento armonico, v. ad. es., Hagedorn [1]. In Fig. 9 sono riporati i

valori di tali parametri in funzione di ν. Si vede che per $\nu > \nu_2$ *non* si hanno subarmoniche $2T$, essendo $T = 2\pi/\nu$, mentre per $\nu = \nu_2$ si presenta il fenomeno del raddoppio del periodo, potendosi avere subarmoniche $2T$ accanto ad armoniche T. Diminuendo ulteriormente la frequenza ν si hanno ulteriori raddoppi del periodo T, e cioè subarmoniche con periodo $4T, \ldots, 2^n T$, finché dopo tutte queste biforcazioni si hanno soluzioni caotiche, in corrispondenza di un certo intervallo di valori, invero non molto ampio, della frequenza ν.

Riguardo al *period doubling* ci pare interessante osservare quanto segue. Nel caso della doppia buca di potenziale, riportata in Fig. 3b, è facile riconoscere che sono possibili essenzialmente due tipi di vibrazioni libere periodiche:

1) con ampiezza «piccola» nell'intorno di ciascuna delle due configurazioni di equilibrio stabile B e B';
2) con ampiezza «grande» e passaggio successivo per B e B'.

Si può dire grosso modo che il periodo di oscillazione di queste seconde sia il doppio del periodo delle prime. Se allora si eccita il sistema con una forzante sinusoidale (e con l'aggiunta di un piccolo dissipatore), secondo un modello matematico del tipo:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} - \frac{1}{2} x (1 - x^2) = f \cos \omega t \tag{21}$$

qualora si passi da oscillazioni forzate del 1° tipo ad oscillazioni del 2° tipo, sia la simulazione al calcolatore, sia l'esperienza, v. ad es. le ricerche di Moon [9], indicano l'insorgere di moti caotici. Ecco dunque un altro tipo di *rout to Chaos*, collegato ad un raddoppio di periodo, con la complicità della instabilità in A.

Diamo infine un rapido cenno ad alcune ricerche su di un sistema con *due* gradi di libertà, che generalizza l'equazione di Duffing, perché ad essa si riduce per $b_1 = 0$:

$$\begin{cases} \ddot{x} + K_1 x + K_3 x^3 + a_1 y = 0 \qquad (K_1, h_1) \in R_+ ; \ (K_3, a_1, b_1) \in R \\ \ddot{y} + h_1 y + b_1 x = 0 \end{cases} \tag{22}$$

In due memorie [10] e [11] abbiamo studiato la stabilità delle soluzioni periodiche (approssimate). Trattandosi di un sistema autonomo si presenta nuovamente, come già per il pendolo, il fatto fondamentale che in campo non lineare *non esiste alcuna frequenza privilegiata*, come invece

0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.7
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
CHAOS
2T
4T
2T

Fig. 9

1.5
1.5
1.5
1.5
t
0
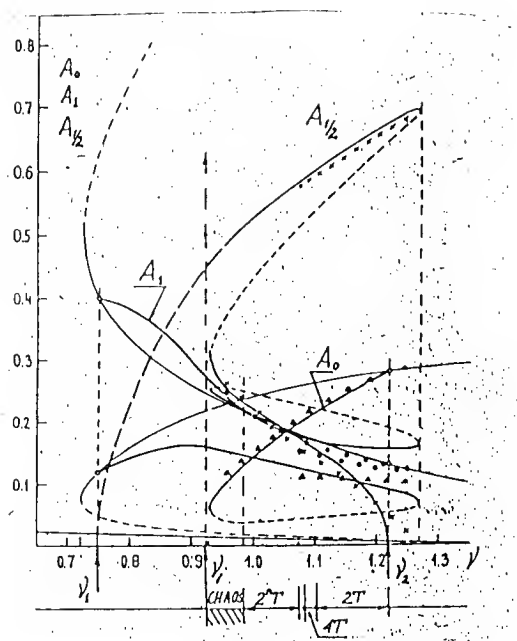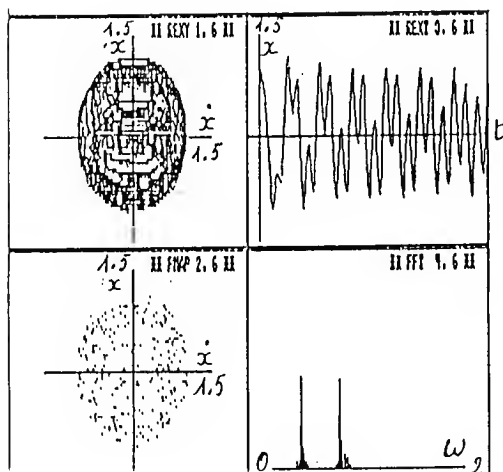
Fig. 10

sono le frequenze delle forzanti nelle equazioni (15), (18) e (21). Trattandosi poi di un sistema con due gradi di libertà assumono rilievo anche i *modi di vibrazione*, ossia i rapporti delle ampiezze delle soluzioni periodiche $x(t)$ e $y(t)$, ammesso che esistano. Sono stati individuati, per diversi insiemi di valori dei parametri $(K_1, K_3, a_1, b_1, h_1)$, i valori delle possibili frequenze di vibrazioni periodiche per cui si ha stabilità o instabilità, riscontrando altresì che si possono presentare i due tipi fondamentali di instabilità:
— con (x, y) tendenti ad infinito per $t \to +\infty$
— con (x, y) sempre limitati, ma con diagrammi orari molto irregolari.

Per questi ultimi sono in corso ricerche al calcolatore in collaborazione con P. Niezgodsky, per metterne in evidenza le tipiche proprietà di struttura. Si tenga presente che il tracciamento delle mappe di Poincarè presenta l'incognita essenziale dell'intervallo di tempo impiegato nell'operazione stroboscopica per individuare i successivi punti sul piano $(x, \dot{x})$ oppure $(y, \dot{y})$, appunto perché non esiste un particolare periodo privilegiato. In Fig. 10 sono riportati alcuni risultati preliminari ottenuti per:

$$\begin{cases} K_1 = 1 \\ K_3 = 0.533 \end{cases} \quad \begin{cases} h_1 = 0.5 \\ a_1 = 1.2 \\ b_1 = 0.3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_o = 1 \\ y_o = 1.1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_o = 0 \\ \dot{y}_o = 0 \end{cases} \tag{23}$$

che sembrano indicare carattere caotico del moto.

4. Una riflessione finale

Noi che lavoriamo in campo scientifico siamo abituati a pensare che 2 + 2 faccia sempre 4, e ce lo sentiamo ripetere, in contrapposizione ad altre manifestazioni dell'ingegno umano come la letteratura, le arti, la medicina stessa, in cui 2 + 2 può fare qualunque cosa oltre che 4. Quando si parla di «*caos*» nel modo scientifico si ha la sensazione di trovarsi in questa stessa imbarazzante situazione. Dobbiamo allora pensare che la Natura, quella «φύσις» che pur fornisce esempi mirabili di precisione cronometrica — si pensi ai moti dei corpi celesti — di fronte ad una operazione elementare come 2 + 2 spesso e volentieri non sappia che pesci pigliare e preferisca risposte poeticamente incerte anziché inesorabilmente precise?

Vi lascio con questo interrogativo, su cui certamente l'amico Gianni Jarre avrebbe saputo ricamare qualcuna delle sue argute battute.

BIBLIOGRAFIA

[1] HAGEDORN P., *Non-linear oscillations*. Clarendon Press-Oxford (1980)

[2] WILLEMS J.L., *Stability Theory of Dynamical Systems*. Nelson (1970).

[3] BAI-LIN HAO (ed.), *Directions in chaos*. World Scientific (1987).

[4] LIVI R. ED ALII (ed.), *Chaos and complexity*. World Scientific (1988).

[5] THOMPSON J.M.T., STEWARD H.B., *Nonlinear Dynamics and Chaos*. John Wiley and Sons (1986).

[6] UEDA Y., *Steady motions exhibited by Duffing's equation: a picture book of regular and chaotic motions*. In *New approaches to Nonlinear Problems in Dynamics*. P.J. Homes (ed.), pag. 311, SIAM (1980).

[7] MANDELBROT B., *Fractals*. Freeman and Co., San Francisco (1977).

[8] SZEMPLINSKA STUPNICKA W., *On routes to chaotic motion in oscillators with unsymmetric and symmetric elastic nonlinearity*. Accademia Polacca. Istituto Ricerche Tecnologiche Fondamentali, Varsavia, n. 27/1986.

[9] MOON F.C., LI G.X., *The fractal dimension of the two-well potential strange attractor*. Physica 17D (1985) pag. 99.

[10] NOCILLA S., BERTOLIN M., *Studies on the stability of a system generalixing the Duffing equation*. Memoria Accademia Scienze, Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., Vol. 8 (1984), pag. 259.

[11] NOCILLA S., SZEMPINSKA STUPNICKA W., *On instabilities of periodic solutions and irregular behaviour of a nonlinear autonomous system*. Memoria Accademia Scienze Torino, C. Sci. Fis. Mat. Nat., Vol. 10 (1986), pag. 77.

Nuove ricerche sulla teoria della turbolenza

Massimo GERMANO*

1. Introduzione

Le teorie e le tecniche applicate negli ultimi tempi allo studio della turbolenza sono moltissime. Esse vanno dalla teoria delle biforcazioni alla teoria degli attrattori strani, dalla teoria dei frattali alla teoria della rinormalizzazione delle scale [1]. Lo sviluppo dei calcolatori ha stimolato nuovi approcci che non si limitano allo sviluppo di algoritmi numerici ma comportano nuovi modelli rappresentativi dello stato fluido, diversi da quello tradizionale di Stokes-Navier, quali i cellular automata e la dinamica molecolare [2]. Per quel che riguarda i campi di applicazione occorre segnalare il grande interesse per la stabilità non lineare e la genesi della turbolenza, campi nei quali si sono raccolti importanti risultati, mentre per quel che riguarda la turbolenza sviluppata occorre dire che il quadro fenomenologico classico è sostanzialmente confermato [3]: essere la turbolenza un processo dissipativo nel quale tipicamente i processi di interazione non lineare trasferiscono energia da un moto di larga scala o moto medio alle scale inferiori. La dissipazione viscosa impedisce infine l'accumulo di energia nelle piccole scale e stabilisce l'equilibrio tra il trasferimento inerziale ed il drenaggio viscoso, e non è fuor di luogo sottolineare che questa visione d'insieme costruita con tecniche molto elementari e con grande intuito fisico principalmente dal Taylor e dal Kolmogorov rappresenta sempre un sicuro punto di riferimento ed è sempre fonte di sicuri suggerimenti all'atto pratico.

Sempre per quel che riguarda la turbolenza sviluppata si nota tuttavia una certa stasi relativamente in particolare ai modelli di chiusura delle equazioni mediate di Reynolds, sempre ampiamente utilizzati in sede pratica [4], ma sempre esposti a grosse critiche di fondo [5]. Considerazioni di scala indicano del resto che i gradi di libertà di un flusso turbolento

* Dip. di Ing. Aeronautica e Spaziale, Politecnico di Torino, C.so Duca degli Abruzzi, 24, 10129 Torino, Italia.

scalano in ogni direzione come $R^{\frac{3}{4}}$ dove R è il numero di Reynolds [6]; questo fatto può anche essere espresso nei termini di dimensione dall'attrattore strano associato ad un flusso turbolento [7] e tutto ciò praticamente si traduce nel fatto che una simulazione diretta al calcolatore richiede $R^{\frac{9}{4}}$ punti di calcolo se vuole calcolare in ogni dettaglio il flusso turbolento in esame sino alla microscala dissipativa. Se a ciò si aggiunge che per avere una adeguata risoluzione temporale occorre procedere per almeno $R^{\frac{1}{2}}$ passi nel tempo si ha una idea della assoluta attuale impossibilità di simulare direttamente flussi turbolenti di interesse pratico.

Tra le equazioni di Reynolds, nelle quali tutte le scale coinvolte nel fenomeno turbolento sono mediate, e la simulazione diretta, nella quale ogni dettaglio è risolto sino alla scala dissipativa, si sono ultimamente inseriti i cosiddetti metodi LES, (Large Eddy Simulation), nei quali si cerca di calcolare esplicitamente la larga scala, o i grossi vortici, e si mediano solamente i piccoli vortici di natura più stocastica e più universale. Lo sviluppo di questi metodi, che a parere dell'autore sono tra i più interessanti e promettenti dal punto di vista delle applicazioni, comporta sia un ripensamento di concetti classici quali i processi di media e di filtraggio delle equazioni, sia una conoscenza approfondita degli algoritmi di discretizzazione numerica che molto spesso si comportano di per sé come veri e propri impliciti operatori di filtraggio attraverso per esempio le loro proprietà dissipative. Appare evidente che i metodi LES assumono il ruolo di tecniche tese essenzialmente a modellare tutto ciò che la numerica non può risolvere; ad un estremo stanno le equazioni di Reynolds e all'altro la simulazione diretta, ed il numero di Reynolds e ciò che apre la forbice tra le due. Nei paragrafi che seguono si cercherà di illustrare più in dettaglio questi punti fondamentali.

2. Operatori di media

L'idea di applicare al segnale turbolento degli operatori di media al fine di separare in qualche modo la larga dalla piccola scala, è di vecchia data: come ricorda Kampè de Feriet [8] le prime medie proposte rispettivamente dal Boussinesq e dal Reynolds furono le seguenti

$$\bar{f}(\vec{x}, t; \vartheta) = \frac{1}{\theta} \int_{t}^{t+\vartheta} f(\vec{x}, t')\, dt' \qquad (1)$$

$$\bar{f}(\vec{x}, t; h) = \frac{1}{h^3} \int_x^{x+h} \int_y^{y+h} \int_z^{z+h} f(\vec{x}', t)\, dx'\, dy'\, dz' \tag{2}$$

dove ϑ è «un temps assez petit» e h^3 «a certain volume». Sempre di vecchia data è anche la constatazione che mediare dei segnali è relativamente chiaro e semplice, mentre mediare delle equazioni non lineari è un'operazione per molti versi oscura e misteriosa. Il coraggio di saltare il ponte e di mediare le equazioni di Stokes-Navier è dovuto al Reynolds; il prodotto di ciò sono le relative equazioni che nel caso di un fluido incompressible sono date da

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i \bar{u}_k)}{\partial x_k} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \nabla_2 \bar{u}_i - \frac{\partial(\overline{u_i' u_k'})}{\partial x_k} \tag{4}$$

essendo $u_i = \bar{u}_i + u_i'$ e $p = \bar{p} + p'$ e a lungo si è cercato di capire quali sono effettivamente gli operatori di media che le producono. Certamente non è un operatore spazio-temporale del tipo (1) o (2) e Reynolds stesso declinò le «regole del gioco» che le producono e che sono definite a livello di algebra operatoriale come

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \; ; \; \overline{\frac{\partial f}{\partial x_k}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k} \tag{5}$$

$$\overline{f'} = 0 \; ; \; \overline{fg} = \bar{f}\bar{g} + \overline{f' g'} \tag{6}$$

essendo $f = \bar{f} + f'$ e $g = \bar{g} + g'$. È del resto evidente che queste «regole del gioco» sono automaticamente soddisfatte interpretando $\bar{f}$ come media statistica in uno spazio probabilistico ω

$$\bar{f}(\vec{x}, t) = \int_\Omega f(\vec{x}, t, \omega)\, \mu(\omega)\, d\omega \tag{7}$$

dove $\mu(\omega)$ è la probabilità del verificarsi di f in un dato dominio di soluzioni Ω, ed è anche evidente che $\bar{f}$ è pure interpretabile come

$$(8) \qquad \bar{f}(\vec{x}) = \lim_{T \to \infty} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(\vec{x}, t')\, dt'$$

La strada maestra era segnata: abbandonate le vaghe proposte di medie spazio-temporali delle origini la trattazionc della turbolenza si inquadrava nei campi della meccanica statistica e delle funzioni aleatorie mentre il teorema ergodico assicurava, nel caso di turbolenza stazionaria, stretti rapporti con le medie temporali misurate direttamente in laboratorio, e non è il caso ora di entrare nel dettaglio sulle luci e sulle ombre che tanti anni di speeulazione in questa direzione hanno prodotto nello studio della turbolenza. È interessante invece seguire lo sviluppo parallelo di quelle prime idee, sviluppo che, all'ombra della rappresentazione stocastica dei fenomeni turbolenti e parafrasando il titolo di un recente film di successo, è stato neccessariamente quello di «figlio di un dio minore». La documentazione in proposito è abbastanza scarsa e anche qui è basilare il già citato lavoro di Kampè de Fèriet [8] dal quale ricaviamo che nel 1924 Keller e Friedmann [9] propongono una media spazio-temporale fusione della (1) e della (2), mentre è del 1939 la proposta di A.A. Isakson [10] di una operazione di filtraggio nel tempo della $f(t)$ decomposta in armoniche

$$(9) \qquad f(t) = \int_0^\infty A(\lambda) \cos(\lambda t - \alpha))\, d\lambda$$

$$(10) \qquad \bar{f}(t) = \int_E A(\lambda) \cos(\lambda t - \alpha(\lambda))\, d\lambda$$

dove E è l'insieme delle frequenze conservate.

Ritornando a quanto detto prima, che un conto è mediare o filtrare dei segnali e un conto è mediare o filtrare delle equazioni, occorre dire che la preccupazione principale di queste ricerche, compresa quella citata dal Kampè de Fèriet, è essenzialmente giustificare le equazioni di Reynolds su basi diverse da quelle strettamente statistiche, e non tanto quella di derivare e interpretare le relative nuove equazioni mediate, compito tanto più complesso quanto più vengono a mancare le basilari «regole del gioco» espresse dalle (5) e (6). In particolare il fatto che $\overline{f'}$ non sia più nullo e che non sia più vero che $\overline{fg} = \bar{f}\bar{g} + \overline{f'g'}$ complica notevolmente le cose. Una traccia di questo imbarazzo la si rileva nel libro di Monin e Yaglom sulla Meccanica della Turbolenza [11]. Nel

capitolo in cui è affrontato il problema delle medie si esamina innanzitutto la generica media spazio-temporale di tipo convolutivo

$$\bar{f}(\vec{x},t;\,h,\,\vartheta)=\int f(\vec{x}\,',t\,')\,G(\vec{x}-\vec{x}\,',t-t';\,h,\,\vartheta)\,d^3\vec{x}\,'\,dt\,' \tag{11}$$

con

$$\int G(\vec{x}-\vec{x}\,',t-t\,';\,h,\,\vartheta)\,d^3\vec{x}\,'\,dt\,'=1 \tag{12}$$

Al riguardo, e citando la traduzione inglese della MIT Press, pg. 209, Vol. 1, viene poi testualmente aggiunto: «The use of time, space or time-space averaging defined by some equation of the form (11), is very convenient from the practical viewpoint but leads to a great many unavoidable analytical difficulties in theoretical calculations. Moreover, this type of averaging has the great disadvantage that the question of the form of the function *G* suitable for the given problem must be resolved each time before use. For all these reasons it is desirable in the theory of turbulence to avoid the use of this type of averaging altogether, and to adopt instead some other method of defining the mean value, a method that has simpler properties and is more universal. A convenient definition of this type, which we shall use throughout this book, is found in the probability-theory treatment of the fields of fluid dynamic variables in a turbulent flow as random fields». Queste parole sembrano abbattersi sulle medie spazio-temporali come una pietra tombale e concludere così il nostro excursus storico, ma così non è. Il calcolatore si insinua tra le tecniche analitiche e quelle sperimentali proponendo nuovi punti di vista, suggerendo nuovi metodi e rivalutandone vecchi.

3. La Large Eddy Simulation

Il calcolatore fa vedere molte cose in luce diversa. In particolare le «great many unavoidable difficulties» che Monin e Yaglom prevedono nell'applicazione delle medie convolutive (11) «in theoretical calculations» non sembrano così terribili nella loro traduzione numerica grazie alle enormi capacità di calcolo sviluppate dai moderni calcolatori. Ci sono inoltre interessanti analogie tra l'applicazione di «filtri» convolutivi alle equazioni di Stokes-Navier e le discretizzazioni numeriche: entrambe introducono negli algoritmi che ne derivano delle nuove scale di spazio

e di tempo, le lunghezze caratteristiche di griglia Δx e Δt e le lunghezze caratteristiche di filtro nello spazio e nel tempo h e ϑ. È del resto noto che uno schema numerico che traduce per esempio alle differenze finite le equazioni di Stokes-Navier risolve in realtà una «equazione modificata» [12] nella quale possono essere presenti termini dissipativi e dispersivi scalati con Δx e Δt; inoltre è caratteristico del troncamento di griglia e degli schemi conservativi applicati a problemi non lineari il blocco della cascata inerziale con relativo immagazzinamento sulle scale risolte dell'energia non dissipata, fino all'esplosione del calcolo stesso [13]. Al fine di separare nettamente il processo di filtraggio dalla numerica è sembrato opportuno [14] ricorrere alle vecchie idee di medie spazio-temporali. Ribattezzate come filtri le medie convolutive (11) sono state riproposte come mezzo per separare i valori di grande scala $\bar{f}$ da quelli di piccola scala f', ed è opportuno notare che ora i termini grande e piccolo assumono un valore ben preciso in quanto spontaneamente legati alle scale di griglia di calcolo Δx e Δt a disposizione. Indipendentemente dalla forma del nucleo convolutivo G notiamo che le (11) rispettano ancora le condizioni

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}; \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial x_k}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k} \tag{13}$$

e possiamo quindi scrivere formalmente che

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{u_i u_k})}{\partial x_k} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \nabla_2 \bar{u}_i \tag{15}$$

anche se in generale non è più vero che $\overline{f'} = 0$ e che $\overline{fg} = \bar{f}\bar{g} + \overline{f'g'}$. Naturalmente si ripresenta anche qui il classico problema della chisura, ben noto dalle equazioni di Reynolds, e cioè che i termini $\overline{u_i u_k}$ non possono essere calcolati direttamente. Questo problema è stato affrontato nella Large Eddy Simulation con due diversi approcci, l'approccio «implicito» e l'approccio «esplicito». L'approccio implicito, sviluppato in particolare da Lilly [15], Deardorff [16], Schumann [17], si basa più genericamente sull'idea che la discretizzazione di per sé attui una

implicita operazione di media: si può per esempio notare dalla semplice relazione

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\Delta x}\int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} f(x')\,dx'\right) \tag{16}$$

che un operatore discreto di derivazione sulla scala Δx è interpretabile come un operatore analitico di derivazione di un valore mediato sulla stessa scala. Sulla base di queste considerazioni nell'approccio empirico si scrive più semplicemente

$$\overline{u_i u_j}=\bar{u}_i\bar{u}_j+T_{ij} \tag{17}$$

dove la soprallineatura indica il processo di media operato dalla discretizzazione numerica e T_{ij} i relativi termini di sottogriglia. Nell'approccio esplicito, che è più coerente con quanto detto sinora, e che è stato sviluppato in particolare da Leonard [14], Ferziger [18], W.C. Reynolds [19] si scrive invece esplicitamente, essendo $u_i=\bar{u}_i$ e $u_j=\bar{u}_j=\bar{u}_j+u_j'$

$$\overline{u_i u_j}=\bar{u}_i\bar{u}_j+(\overline{\bar{u}_i\bar{u}_j}-\bar{u}_i\bar{u}_j)+\overline{u_i'\,\bar{u}_j}+\overline{u_j'\,\bar{u}_i}+\overline{u_i'\,u_j'} \tag{18}$$

e si scompone T_{ij} nei tre termini

$$T_{ij}=L_{ij}+C_{ij}+R_{ij} \tag{19}$$

dove

$$L_{ij}=\overline{\bar{u}_i\bar{u}_j}-\bar{u}_i\bar{u}_j \tag{20}$$

sono i cosiddetti termini di Leonard,

$$C_{ij}=\overline{u_i'\,\bar{u}_j}+\overline{u_j'\,\bar{u}_i} \tag{21}$$

i termini incrociati, e

$$R_{ij}=\overline{u_i'\,u_j'} \tag{22}$$

i termini di sottogriglia, e l'operatore di media indicato con la soprallineatura è un filtro esplicitamente dato, tipicamente una Gaussiana di ampiezza h

$$G(\vec{x}-\vec{x}\,';h)=\left(\frac{6}{\pi h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{6(\vec{x}-\vec{x}\,')^2}{h^2}\right). \tag{23}$$

È chiaro che, mentre i termini di Leonard possono essere calcolati esplicitamente, sia i termini di sottogriglia T_{ij} dell'approccio esplicito che i termini C_{ij} e R_{ij} di quello implicito vanno parametrizzati. A tale scopo si sono sviluppati i vari modelli di sottogriglia,

4. Modelli di sottogriglia

I modelli di sottogriglia adempiono essenzialmente al compito di trasferire energia dalle scale risolte a quelle non risolte, simulando al meglio la cascata inerziale e la dissipazione viscosa. Ciò viene realizzato nel caso più generale attraverso una parametrizzazione di tipo dissipativo dei termini di sottogriglia. Nel caso dell'approccio esplicito si pone

$$T_{ij}-\frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij}=-2\nu_t S_{ij} \tag{24}$$

dove

$$S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) \tag{25}$$

dove ν_t è una opportuna viscosità turbolenta e dove è opportuno notare che il termine $\frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij}$ rappresentante l'energia cinetica di sottogriglia viene praticamente conglobato nelle equazioni mediate con il termine di pressione senza avere alcun effetto dinamico diretto. Per quel che riguarda la viscosità turbolenta ν_t la proposta di Smagorinsky [20] è quella di scalarla attraverso la scala di lunghezza Δx di griglia

$$\nu_t=(c_s\,\Delta x)^2\,S \tag{26}$$

dove $S=\sqrt{S_{ij}S_{ij}}$ e dove c_s è una opportuna costante. Passando ora all'approccio esplicito occorre innanzitutto ricordare che in esso appare esplicitamente il termine di Leonard L_{ij} che viene calcolato direttamente e che di per sé già opera un certo trasferimento di energia dalle scale

risolte a quelle non risolte. Per i termini C_{ij} e R_{ij} dell'approccio esplicito due proposte sono state fatte e studiate numericamente: la prima è quella di utilizzare anche per essi una parametrizzazione alla Smagorinsky ponendo

(27) $$Q_{ij} = C_{ij} + R_{ij}$$

e

(28) $$Q_{ij} - \frac{1}{3} Q_{kk} \delta ij = -\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

dove ora

(29) $$\nu_t = (c_s h)^2 S$$

con h larghezza caratteristica di filtro. Notiamo che una precisa separazione della numerica dal processo di media richiederebbe $h \gg \Delta x$, ma in pratica $h = 2\Delta x$ è il valore usato con il filtro Gaussiano. Il principale svantaggio del modello dissipativo di Smagorinsky è quello di non trasferire sufficiente energia dalle grandi scale alle piccole scale. Essendo in genere nelle Large Eddy Simulation il numero d'onda di taglio $k_c \simeq (\Delta x)^{-1}$ situato nella cascata inerziale la simulazione del processo turbolento resta alterata. Un modello di sottogriglia che provvede un notevole trasferimento inerziale è quello proposto da Bardina, Ferziger e W.C. Reynolds [21] dato dall'espressione

(30) $$C_{ij} = c_b (\bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_j)$$

con c_b costante numerica, mentre i termini R_{ij} restano parametrizzati alla Smagorinsky. Questo modello, detto modello «misto», è stato recentemente provato numericamente [22] al fine di verificare la consistenza tra modello di sottogriglia c filtro esplicito usato, ed ha dato buoni risultati in particolare nel caso di un filtro Gaussiano.

5. Nuovi sviluppi

L'approccio esplicito, pur essendo più articolato di quello implicito, presenta tuttavia notevoli complicazioni di calcolo e alcuni punti oscuri. Uno di questi è relativo alla invarianza Galileiana dei vari termini

in cui è decomposto il tensore degli sforzi turbolenti $T_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$ di cui è immediato verificare detta invarianza. Se infatti operiamo la sostituzione

$$(31) \qquad u_i = u_i^* + V_i$$

con V_i velocità costante di traslazione, si ha $T_{ij} = T_{ij}^*$. Nell'approccio esplicito si pone invece $T_{ij} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}$, ed è facile verificare [23] che in questa decomposizione i termini

$$(32) \qquad L_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$$

e

$$(33) \qquad C_{ij} = \overline{u_i' \bar{u}_j} + \overline{u_j' \bar{u}_i}$$

non sono, presi singolarmente, invarianti Galileiani. Per i termini L_{ij}, calcolati esplicitamente, non esistono inconvenienti, ma per i termini C_{ij} si pone il problema della coerenza tra i termini parametrizzati e il relativo modello. È interessante notare che nel caso del modello misto in cui C_{ij} è dato dalla (30) il modello segue le stesse leggi di trasformazione non Galileiana se sottoposto ad una velocità di traslazione uniforme a patto che si ponga c_b rigorosamente uguale a 1, ed è interessante notare che i test numerici avevano già ottimizzato empiricamente questa costante al valore 1.05, ma tuttavia resta qualche dubbio sulla effettiva bontà di questo modo di procedere, e ci si può chiedere se un diverso modo di decomporre gli sforzi di sottogriglia non possa portare ad una impostazione di fondo più soddisfacente. Notiamo che, dal punto di vista operatoriale, gli «sforzi turbolenti» $\tau(u_i, u_j)$ associati ad un operatore di media sono definiti come

$$(34) \qquad \tau(u_i, u_j) = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$$

e nell'approccio diretto si ha ovviamente

$$(35) \qquad T_{ij} = \tau(u_i, u_j) \ .$$

Nell'approccio esplicito una decomposizione di $\tau(u_i, u_j)$ coerente con la definizione (34) darebbe [24]

$$(36) \qquad \tau(u_i, u_j) = \tau(\bar{u}_i, \bar{u}_j) + \tau(u_i', \bar{u}_j) + \tau(\bar{u}_i, u_j') + \tau(u_i', u_j')$$

dove i nuovi termini

$$(37) \qquad \mathcal{L}_{ij} = \tau(\bar{u}_i, \bar{u}_j)$$

con

$$(38) \qquad \tau(\bar{u}_i, \bar{u}_j) = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_j$$

i nuovi termini

$$(39) \qquad \mathcal{C}_{ij} = \tau(u_i', \bar{u}_j) + \tau(\bar{u}_i, u_j')$$

con

$$(40) \qquad \tau(u_i', \bar{u}_j) = \overline{u_i' \bar{u}_j} - \overline{u_i'}\, \bar{\bar{u}}_j$$

$$(41) \qquad \tau(\bar{u}_i, u_j') = \overline{u_j' \bar{u}_i} - \overline{u_j'}\, \bar{\bar{u}}_i$$

e i nuovi termini

$$(42) \qquad \mathcal{R}_{ij} = \tau(u_i', u_j')$$

dove

$$(43) \qquad \tau(u_i', u_j') = \overline{u_i' u_j'} - \overline{u_i'}\, \overline{u_j'}$$

vanno confrontati con i vecchi L_{ij} C_{ij} e R_{ij} dati dalle (20), (21) e (22), ed è evidente che nel caso di operatori di media alla Reynolds $\mathcal{L}_{ij} = 0$ $\mathcal{C}_{ij} = 0$ e $\mathcal{R}_{ij} = \overline{u_i' u_j'}$. Una decomposizione di questo tipo, oltre ad essere coerente con la generale definizione di sforzo turbolento data dalla (34), produce automaticamente termini di sottogriglia invarianti Galileianamente. È opportuno inoltre notare che il modello misto (30) precedentemente citato viene ad essere interpretato in questa luce più semplicemente come un modello in cui il termine $\mathcal{L}_{ij}$ viene calcolato esplicitamente, mentre il termine $\mathcal{Q}_{ij} = \mathcal{C}_{ij} + \mathcal{R}_{ij}$ è modellato alla Smagorinsky. Il modello misto verrebbe quindi ad essere null'altro che il più semplice modello esplicito compatibile con la nuova decomposizione espressa dalla (36).

Un altro punto che a parere dell'autore merita qualche approfondimento è quello relativo allo studio delle equazioni filtrate in quanto tali, ed indipendentemente dalla parametrizzazione dei termini di sottogriglia. Notiamo che, almeno formalmente, i filtri definiti dalla (11) sono

invertibili, e prova ne è il fatto che $\overline{\overline{f}} \neq \overline{f}$ contrariamente ai filtri di Reynolds per i quali $\overline{\overline{f}} = \overline{f}$. È facile vedere [25] che esistono filtri semplici che applicati alle equazioni di Stokes-Navier producono sforzi di Reynolds esplicitamente e facilmente calcolabili, come per esempio nel caso del filtro dato dall'operatore integrale

$$\bar{f}(\vec{x}, t; \mathrm{h}) = \int f(\vec{x}', t)\, G(\vec{x} - \vec{x}'; h)\, d^3\vec{x}'\, dt' \tag{44}$$

con

$$G(\vec{x} - \vec{x}'; h) = \frac{\exp\left(-\dfrac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{h}\right)}{4\pi h^2 |\vec{x} - \vec{x}'|} \tag{45}$$

soluzione fondamentale dell'operatore differenziale inverso

$$f = \bar{f} - h^2 \nabla_2 \bar{f} \tag{46}$$

È chiaro che nei termini della (46) la correlazione $\overline{u_i u_j}$ è esprimibile esplicitamente come

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\bar{u}_i - h^2 \nabla_2 \bar{u}_i)(\bar{u}_j - h^2 \nabla_2 \bar{u}_j)} \tag{47}$$

ed essendo sempre dalla (46)

$$\bar{u}_i \bar{u}_j = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - h^2 \nabla_2 \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} \tag{48}$$

si ottiene esplicitamente

$$\overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + 2h^2\, \overline{\nabla \bar{u}_i \cdot \nabla \bar{u}_j} + h^4\, \overline{\nabla_2 \bar{u}_i\, \nabla_2 \bar{u}_j} \tag{49}$$

Sottolineiamo il fatto che la (49) rappresenta formalmente una espressione esatta, coerente con il filtro usato e che quindi può essere usata indipendentemente da modelli di sottogriglia. Notiamo che la classe di filtri di questo tipo è molto grande, e potenzialmente ogni soluzione fondamentale di un operatore differenziale spazio-temporale può essere utilizzata alla bisogna [26]. L'uso di questi filtri nelle simulazioni numeriche è attualmente oggetto di studio da parte dell'autore.

BIBLIOGRAFIA

[1] DWOYER D.L., HUSSAINI M.Y., VOIGT G. editori; «Theoretical Approaches to Turbulence» Springer Verlag New York (1985).

[2] BORIS J.P.; «New Directions in Computational Fluid Dynamics» Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 21, pp. 345-385 (1989).

[3] TENNEKES H., LUMLEY J.L.; «A First Course in Turbulence» The MIT Press Cambridge (1972).

[4] RODI W.; «Examples of Turbulence Models for Incompressible Flows» AIAA Journal, Vol. 20, pp. 872-879 (1982).

[5] CHORIN A.J.; «Lectures on Turbulence Theory» Math. Lectures Series, Pub. Perish Boston (1975).

[6] ROGALLO R.S., MOIN P.; «Numerical Simulation of Turbulent Flows» Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 16, pp. 99-137 (1984).

[7] CONSTANTIN P., FOIAS C., MANLEY O.P. and TEMAM R.; «Determining Modes and Fractal Dimension of Turbulent Flows» J. Fluid Mech., Vol. 150, pp. 427-440 (1985).

[8] KAMPÈ DE FÈRIET J.; «Problemes Mathematiques de la Theorie de la Turbulence Homogene» Corso sulla teoria della turbolenza CIME Varenna (1957).

[9] KELLER L., FRIEDMANN A.; «Differentialgleichungen fur die turbulente Bewegung einer kompressibler Flussigkeit» Proc. I Int. Cong. Applied Mech., pp. 394-405 (1924).

[10] ISAKSON A.A.; «Exposé de J.M. Burgers» Proc. III Int. Cong. Applied Mech., pp. 18-21 (1930).

[11] MONIN A.S., YAGLOM A.M.; «Statistical Fluid Mechanics» The MIT Press Cambridge (1971).

[12] WARMING R.F., HYETT B.J.; «The Modified Equation Approach to the Stability and Accuracy Analysis of Finite Difference Methods» J. Comput. Phys., pp. 159-179, Vol. 14 (1974).

[13] FLETCHER C.A.J.; «Computational Techniques for Fluid Dynamics» Springer-Verlag (1988).

[14] LEONARD A.; «Energy Cascade in Large-Eddy Simulations of Turbulent Fluid Flows» Adv. in Geophysics, Vol. 18A, pp. 237-248 (1974).

[15] LILLY D.K.; «On the Application of the Eddy Viscosity Concept in the Inertial Subrange of Turbulence» NCAR Manuscr. 123 (1966).

[16] DEARDORFF J.W.; «A Numerical Study of Three-dimensional Turbulent Channel Flow at Large Reynolds Numbers» J. Fluid Mech., Vol. 41, pp. 453-480 (1970).

[17] SCHUMANN U.; «Subgrid Scale Model for Finbite Difference Simulation of Turbulent Flows in Plane Channels and Annuli» J. Comput. Phys., Vol. 18, pp. 376-404 (1975).

[18] FERZIGER J.H.; «Large Eddy Numerical Simulations of Turbulent Flows» AIAA J. Vol. 15, pp. 1261-1267 (1977).

[19] REYNOLDS W.C.; «Fundamentals of Turbulence Modeling and Simulation» AGARD-FDP-VKI Course on Modern Approach to Turbulent Flow (1987).

[20] SMAGORINSKY J.; «General Circulation Experiments with the Primitive Equations. I The Basic Experiment» Mon. Weather Rev., Vol. 91, pp. 99-164 (1963).

[21] BARDINA J., FERZIGER J.H., REYNOLDS W.C.; «Improved Turbulence Models Based on Large Eddy Simulation of Incompressible, Turbulent Flows» Stanford Univ. Tech. Rep. TF 19 (1983).

[22] PIOMELLI U., MOIN P., FERZIGER J.H.; «Model Consistency in Large Eddy Simulation of Turbulent Channel Flows» Phys. Fluids, Vol. 31, pp. 1884-1891 (1988).

[23] SPEZIALE C.G.; «Galilean Invariance of Subgrid-Scale Stress Models in the Large Eddy Simulation of Turbulence» J. Fluid Mech., vol. 156, pp. 55-62 (1985).

[24] GERMANO M.; «A Proposal for a Redefinition of the Turbulent Stresses on the Filtered Navier-Stokes Equationis» Phys. Fluids, Vol. 29, pp. 2323-2324 (1986).

[25] GERMANO M.; «Differential Filters for the Large Eddy Numerical Simulation of Turbulent Flows» Phys. Fluids, Vol. 29, pp. 1755-1757 (1986).

[26] GERMANO M.; «Differential Filters of Elliptic Type» Phys. Fluids, Vol. 29, pp. 1757-1758 (1986).

Problemi di meccanica del satellite a filo

Ettore ANTONA*

Indice

* Dip. di Ing. Aeronautica e Spaziale, Politecnico di Torino, C.so Duca degli Abruzzi, 24, 10129 Torino, Italia.

1. Il «Filo» nei programmi spaziali e nelle loro prospettive

1.1. *Scenario attuale*

Il «filo» è stato concepito come «distanziatore» di lunghezza variabile di due masse, che rimangono tuttavia fra loro collegate e con la possibilità di recuperare interamente una delle due nell'altra. La prima applicazione a cui si era pensato riguardava la realizzazione di un sistema che, ospitato in un veicolo orbitante a quote opportune per evitare decadimento, potesse essere calato a quote molto inferiori, da cui operare osservazioni nella atmosfera terrestre e sulla Terra stessa.

Il «veicolo madre» cui, al momento attuale, fanno riferimento i programmi avviati è lo «Space Shuttle», ovviamente. La fig. 1.1.1 presenta una vista schematica di un tale tipo di impiego, ivi compreso uno dei modi previsti per lo sviluppo e la retrazione del filo, che prevede un braccio rigido orientabile, con cui dare inizio e terminare le operazioni.

Ci si rese immediatamente conto che un satellite può essere posizionato mediante il filo, tanto verso la Terra quanto verso lo spazio e furono quindi concepite varie missioni, aventi scopi anche molto diversi da quelli che avevano condotto originariamente all'idea.

In fig. 1.1.2 è rappresentato schematicamente l'assetto di un sistema destinato ad una «missione elettrodinamica». La missione è prevista per il 1991 e compirà studi di natura elettrodinamica sulla ionosfera e sul campo magnetico della Terra. In particolare si indagherà sulla possibilità di generare potenza per interazione del filo (conduttore) con il campo magnetico. Il filo di 20 km di lunghezza sarà usato in missioni di circa 36 ore.

Un'altra missione basata sullo Space-Shuttle è quella «Atmosferica», fig. 1.1.3. Si svolgerà due anni dopo la precedente con un filo di ben 130 km, allo scopo di studiare l'atmosfera e gli effetti aerodinamici a quote in precedenza raggiungibili solo con razzi.

Studiando la dinamica di un sistema, composto da due masse collegate da un filo, nel campo gravitazionale, appare evidente che il filo può anche essere utilizzato per ingenerare nel sistema moti (oscillatori) durante i quali ciascuna delle masse è dotata di quantità di moto variabile nel tempo. In particolare tale quantità di moto può oscillare rispetto ad un valor medio corrispondente alle condizioni orbitali. Liberando quindi dal loro vincolo a filo le due masse in un istante particolare, esse possono trovarsi ciascuna su un'orbita che consenta particolari risultati (ad es. un trasferimento). È questo il caso del programma relativo al Sistema di Rientro dallo Spazio Iniziato con il «Tether». (T.I.S.R.S.), pre-

sentato in fig. 1.1.4. La capsula che deve rientrare oscilla rispetto allo «Shuttle». Liberata in un punto di minima velocità, si trova automaticamente su un'orbita di trasferimento che la conduce vicino alla Terra (lo «Shuttle», data la differenza fra le masse, subisce variazioni di orbita modesti). Il frenamento aerodinamico e eventuali paracadute faranno poi il resto per il rientro e l'atterraggio.
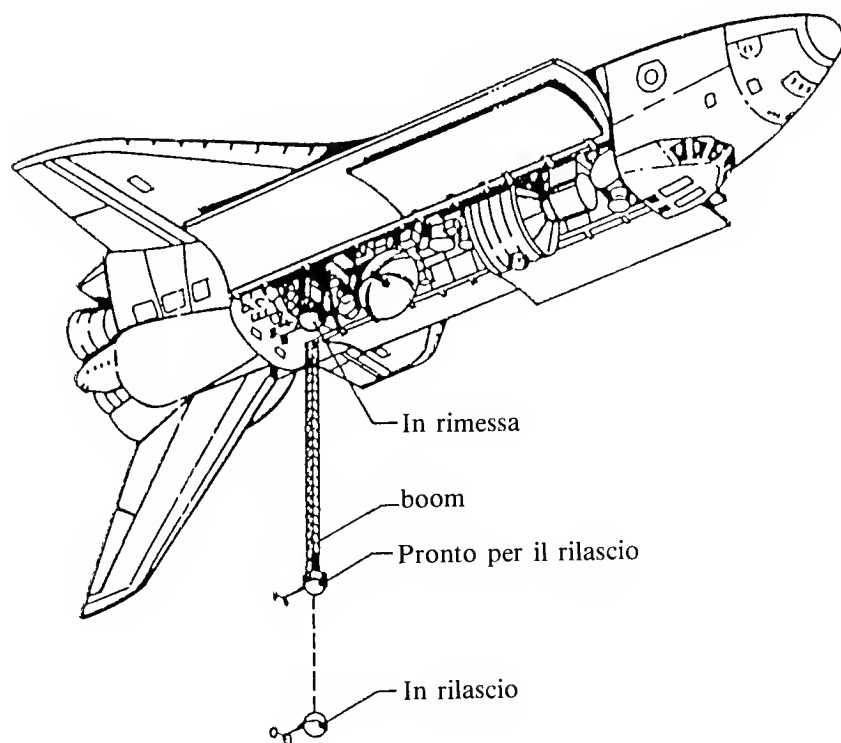
Fig. 1.1.1 - Tipologia in una missione basata sullo SHUTTLE. (Per cortesia di AERITALIA G.S.S.).
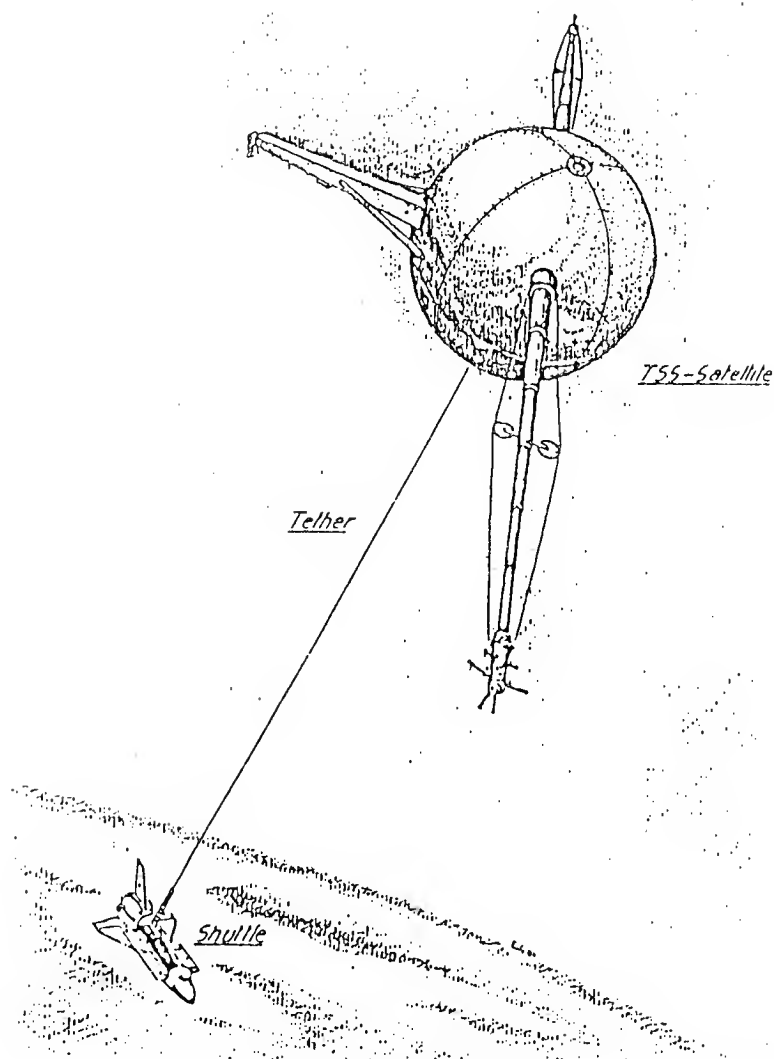
Fig. 1.1.2 - Sistema di Satellite a Filo (TSS). Missione Elettrodinamica. (Per cortesia di AERITALIA G.S.S.).
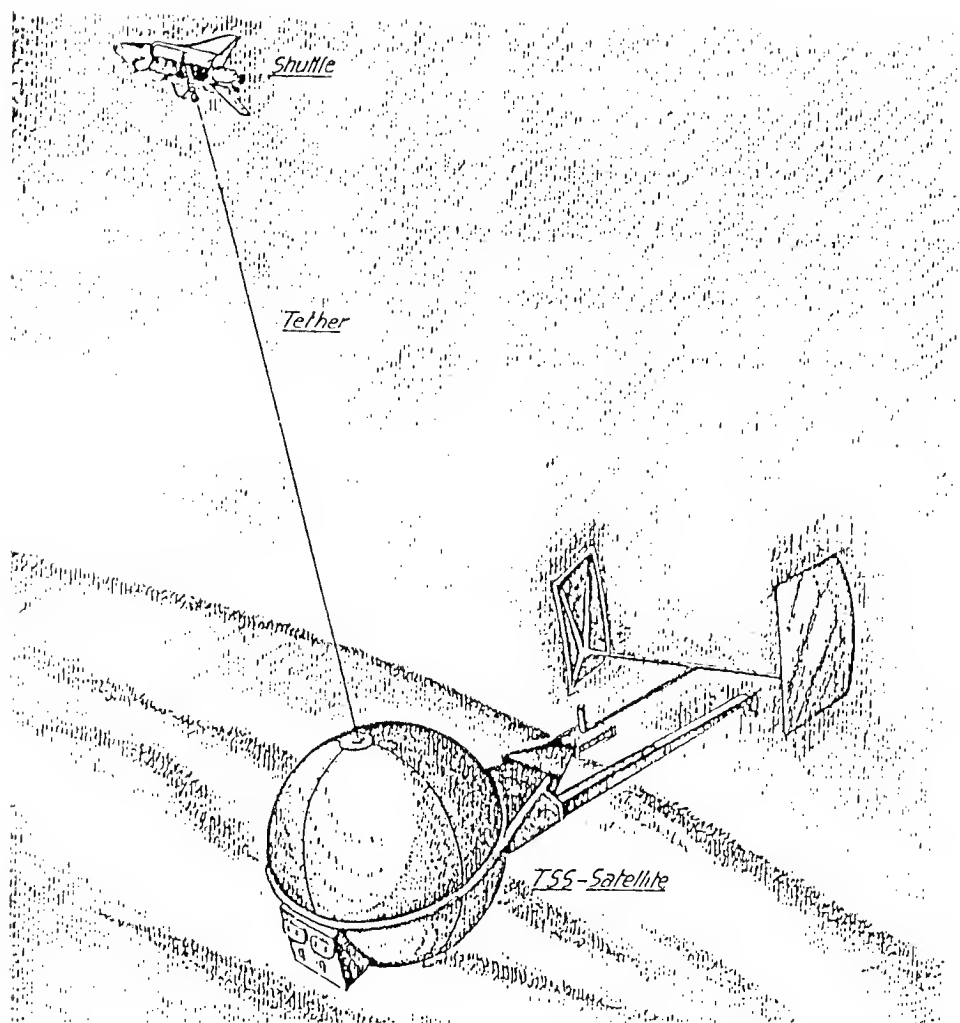
Fig. 1.1.3 - Sistema di Satellite a Filo (TSS). Missione atmosferica. (Per cortesia di AERITALIA G.S.S.).
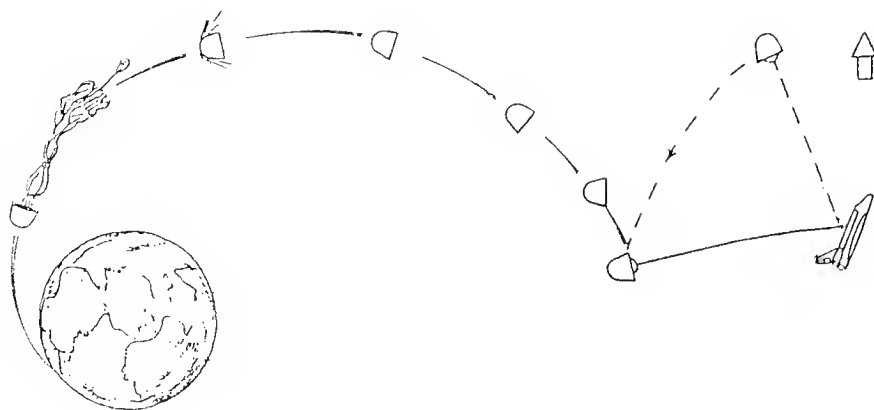
Fig. 1.1.4 - Sistema di Rientro Spaziale con Inizio a mezzo di Fili (TISRS). (Per cortesia di AERITALIA G.S.S.).

1.2. *Scenario futuro*

Per quanto attiene a programmi futuri, in fase di più o meno avanzata analisi, molte sono le applicazioni previste per il «filo». È sufficiente citarne alcune per rendere l'idea dell'interesse dei programmi in cui esse sono inserite nonché della varietà di problemi che è possibile risolvere.

In fig. 1.2.1 è descritta una applicazione multipla per il potenziamento delle capacità di una stazione spaziale a lungo termine.

Il filo, qui azionato sia verso l'alto che verso il basso, consente:

— l'immagazzinamento di riserve di combustibile,
— il rifornimento di combustibile,
— il mantenimento di una piattaforma per scopi scientifici e
— la realizzazione di un «elevatore» di comunicazione fra la stazione e la piattaforma, con il quale fare manutenzione, realizzare microgravità modulabile, posizionare una capsula di rientro, e altri programmi.

La fig. 1.2.2 presenta una applicazione nell'ambito di una missione diretta ad altro pianeta (es. Marte). Il modulo per l'equipaggio, controbilanciato da masse unite con il «filo», costituisce un «manubrio» che, dotato di rotazione, simula gravità di entità variabile con la lunghezza del filo e la velocità angolare.

Altre applicazioni, su cui non ci si sofferma, riguardano ad esempio l'effettuazione di missioni destinate a riportare a Terra campioni di «co-

mete», nelle quali il filo consente ad esempio l'impatto con la cometa di un dispositivo atto a prelevare il campione.
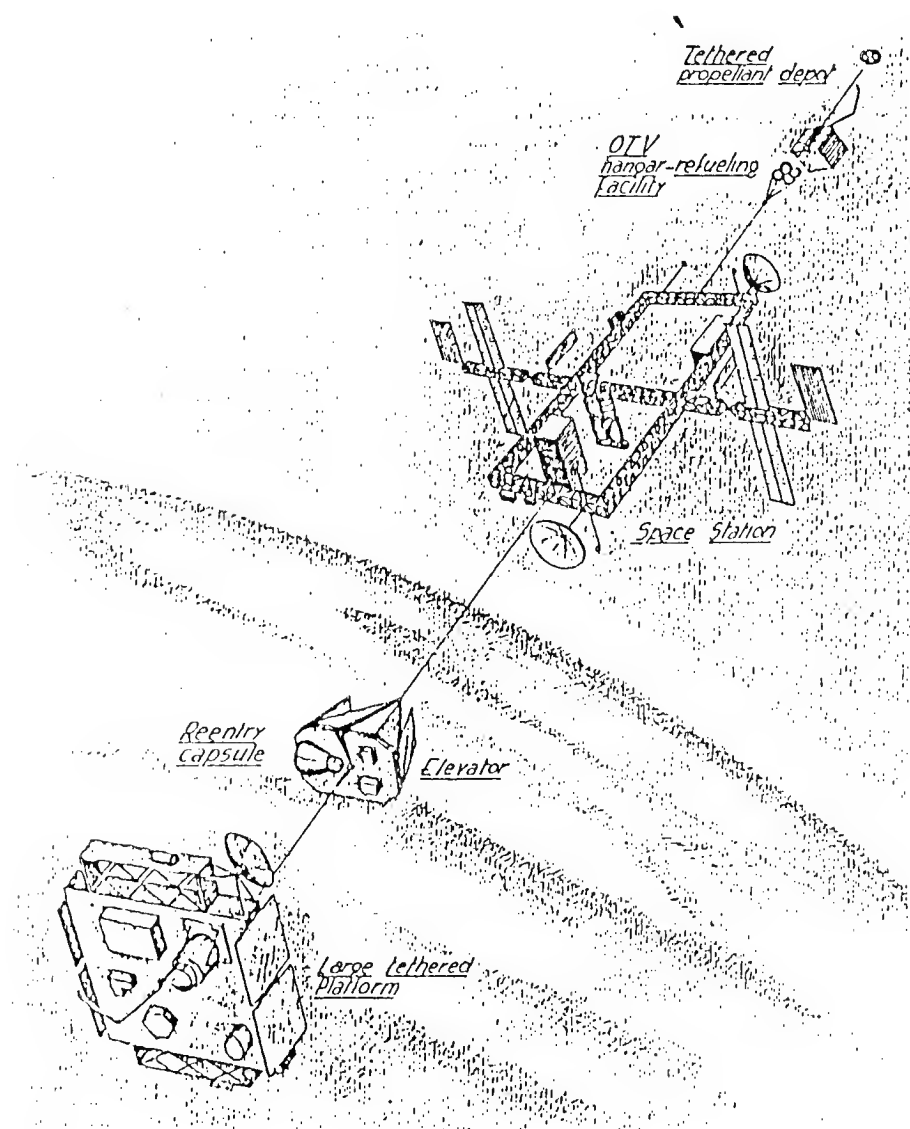
Fig. 1.2.1 - Applicazione multipla e potenziamento delle capacità di stazione spaziale a lungo termine. (Per cortesia di AERITALIA G.S.S.).
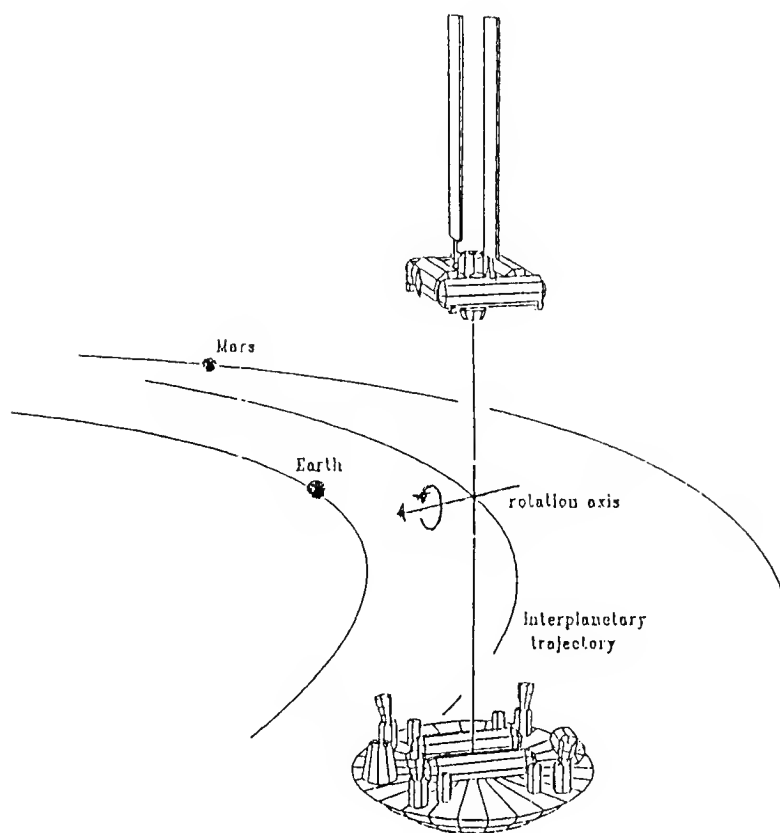
Fig. 1.2.2 - Gravità artificiale per missione su Marte. (Per cortesia di AERITALIA G.S.S.).

2. Aspetti meccanici nei progetti dei satelliti a filo

2.1. *Discipline coinvolte*

Un esame anche superficiale delle configurazioni e delle manovre ottenibili con il «filo» quale distanziatore (flessibile) di masse in programmi spaziali conduce alla constatazione che molte discipline devono esservi coinvolte. Fra queste in particolare la Meccanica (anche celeste), la Fluidodinamica, l'Aerotermodinamica, l'Elettrodinamica, la Geofisica e la Fisica del sistema solare.

2.2. *Principali obiettivi di natura meccanica delle missioni*

Restrigendo il campo agli aspetti meccanici, fra gli obiettivi cospiranti al compimento di missioni di satelliti a filo, appaiono importanti i seguenti: l'eliminazione o la riduzione del decadimento in orbita bassa, la creazione di ambienti mocrogravitazionali di vario livello fino alla gravità artificiale, e, infine, i trasferimenti orbitali.

2.3. *Schemi per l'approccio dei problemi di meccanica*

Uno degli aspetti della presente nota è quello di considerare, accanto al più frequentemente adottato modello discreto: (il filo non ha massa ed elasticità distribuite), anche un più sofisticato modello continuo: (il filo ha massa ed elasticità distribuite).

2.4. *Scelta di un adeguato sistema di riferimento*

Occorre distinguere fra il caso in cui il complesso «veicolo madre»-«satellite a filo» opera nelle immediate vicinanze di un pianeta (es. Terra) e quello in cui tale complesso si trovi più genericamente nel sistema solare.

Nel primo caso, poiché è trascurabile l'effetto degli altri pianeti, costituisce riferimento corretto (e inerziale per quanto concerne le accelerazioni lineari, una terna della quale si tenga conto della velocità angolare, con un asse coincidente con la congiungente Sole, Pianeta, e due assi a questo perpendicolari, uno nel piano dell'eclittica, , nel quale sistema operi l'attrazione del pianeta.

Il gradiente della attrazione del Sole può essere trascurato se ci si trova ad una distanza dal pianeta molto inferiore di quella del primo punto di Lagrange.

Nel secondo caso, se l'influenza di ogni pianeta può essere trascurata, sarà sufficiente analizzare il moto del sistema «veicolo madre»-«satellite a filo» nel suo complesso come un unico corpo attratto dal Sole e la dinamica del satellite rispetto al veicolo rispetto ad un sistema con un asse sulla congiungente Sole-sistema e gli altri rispettivamente tangente e normale alla traiettoria del sistema.

Tali risultati, per altro noti, possono agevolmente desumersi da quanto ad es. esposto in [5], para. 3, nonché, con qualche accorgimento, da quanto esposto anche nel presente lavoro al para. 3.1.

3. Problemi di meccanica nel modello discreto

3.1. *Dinamica del satellite a filo*

3.1.1. *Derivazioni usuali*

Il veicolo madre e il satellite, fra loro tenuti a distanza obbligata al filo, costituiscono un «manubrio», il cui baricentro descrive un'orbita. Nei comuni approcci si analizza la dinamica di ciascuna delle due masse del «manubrio», ponendo nel baricentro l'origine di una terna di assi ortogonali, dotata di velocità angolare attorno al proprio asse perpendicolare all'orbita,. Non si considerano gli effetti delle accelerazioni lineari del baricentro e si trascurano le mutue attrazioni Newtoniane delle due masse.

La fig. 3.1.1 introduce all'equilibrio fra forza gravitazionale e forza centrifuga nel caso di orbite circolari. Se M e m sono le masse del pianeta e del sistema «veicolo-satellite» di volume V, si ha:

$$-\int_V \frac{GM}{r^3}\,\bar{r}\,dm + \int_V \omega^2 \bar{r}\,dm = 0,$$

dove G è la costante di gravitazione e $\bar{r}$ è il raggio (vettore) di ogni dm. Se r_o è il raggio del baricentro, si ha:

$$\bar{F}g = Fe \ ,$$

ovvero

$$\frac{GM}{r_o^2} = \omega^2 r_o \ ,$$

e anche

$$r_o = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} .$$

Se una massa dm non è situata nel baricentro ed è dotata di velocità rispetto alla terna d'assi, essa risulta soggetta a forze (di d'Alembert), che vengono esaminate nelle figg. 3.1.2, 3.1.3 e 3.1.4.
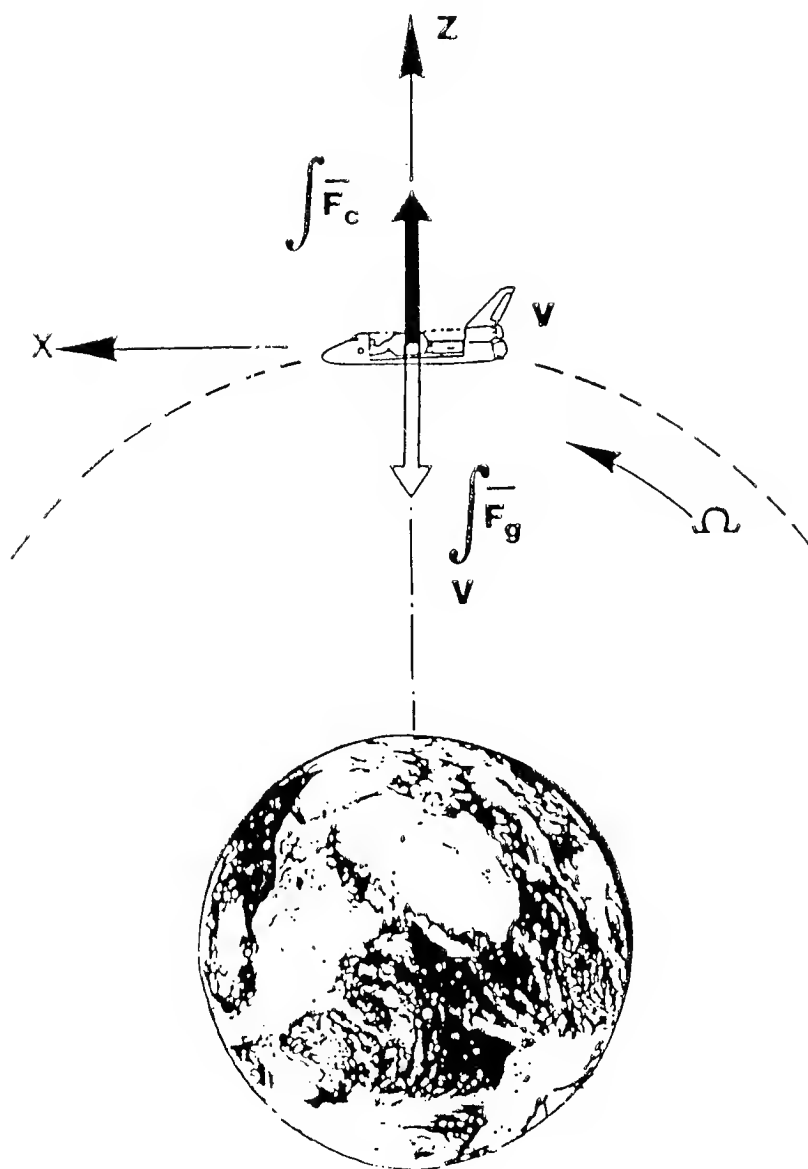
Fig. 3.1.1 - Sistema orbitale-traiettoria circolare. Equilibrio per forze gravitazionali $\bar{F}_g$ forze centrifughe $\bar{F}_c$.

Nella fig. 3.1.2 si introducono le forze dovute a gradiente di gravità verticale. Nel piano orbitale $z-x$, componenti $z=r-r_o$ di posizione rispetto al baricentro generano

$$|\bar{F}_g| \neq |\bar{F}_c| ,$$

e quindi una componente di forze

$$\bar{F}_z \cong \left(- \frac{\partial \bar{F}_g}{\partial r} + \frac{\partial \bar{F}_c}{\partial r} \right) z .$$
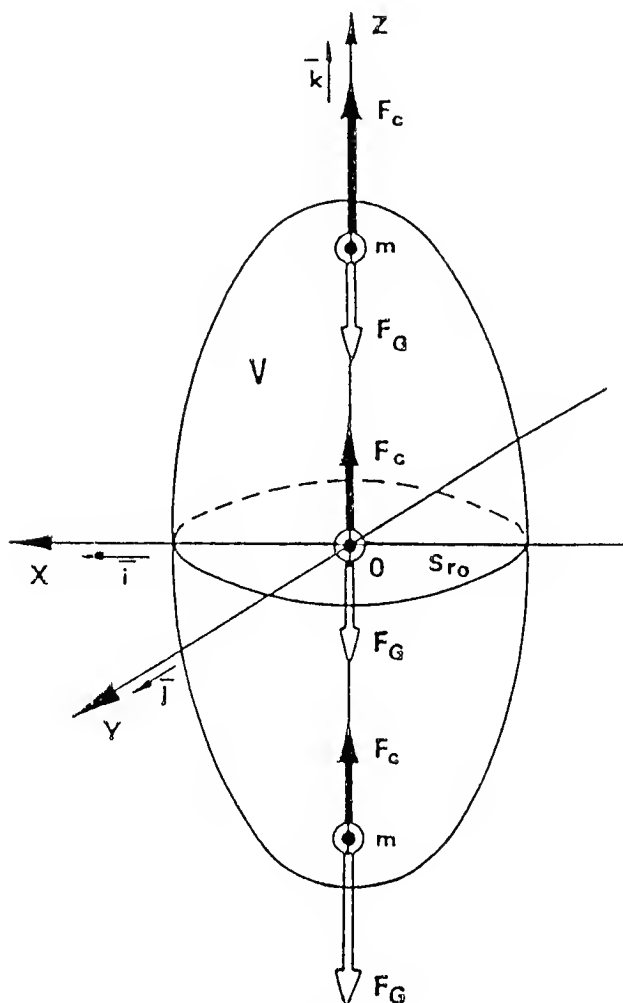
Fig. 3.1.2 - Gradiente di gravità verticale.

Il gradiente gravitazione è $-\dfrac{\partial \bar{F}_g}{\partial r} = 2\ dm\,\omega^2 \bar{k}.$

Il gradiente centrifugo è $\dfrac{\partial \bar{F}_c}{\partial r} = dm\,\omega^2 \bar{k}.$

Risulta

$$\bar{F}_z \cong 3\,dm\,\omega^2 \bar{k}.$$

Nella fig. 3.1.3 si analizza il gradiente di gravità ortogonale al piano orbitale. Si considerano componenti Y di posizione rispetto al baricentro. Esse generano

$$\bar{F}_g \neq \bar{F}_c\ .$$
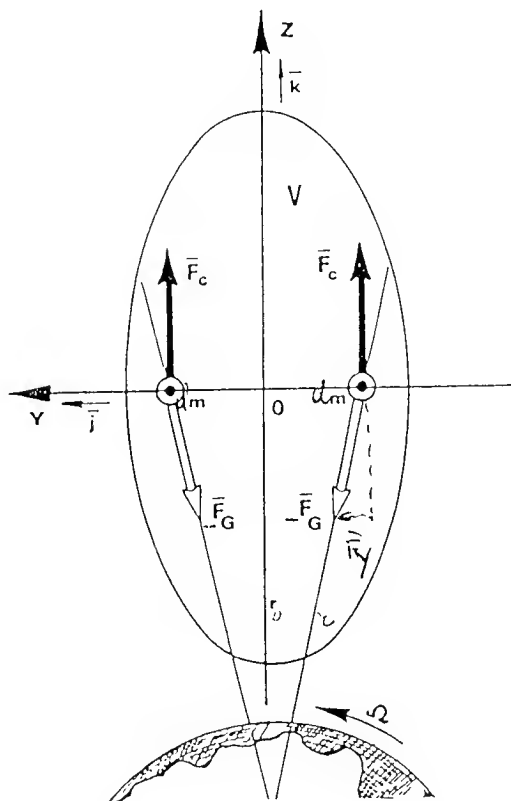
Fig. 3.1.3 - Gradiente di gravità ortogonale al piano orbitale.

Ne risulta una forza, secondo y

$$\bar{F}_y = -\bar{F}_g + \bar{F}_c \ ,$$

la quale può essere espressa, come risulta dalla figura, nei due modi seguenti

$$\bar{F}_y = F_g \frac{y}{r} \bar{j} \ ; \quad \bar{F}_y = -F_c \frac{y}{r_o} \bar{j} \ .$$

Ne risulta:

$$\bar{F}_y = -dm \ \omega^2 y \ \bar{j} \ .$$

Nella fig. 3.1.4 si analizzano le forze dipendenti dalla velocità rispetto alla terna di riferimento, dovute all'effetto di Coriolis. La combinazione di $\dot{x}$ con ω genera:

$$\Delta\bar{F} \cong 2 \ dm \ \omega\dot{x}\bar{k} \ .$$
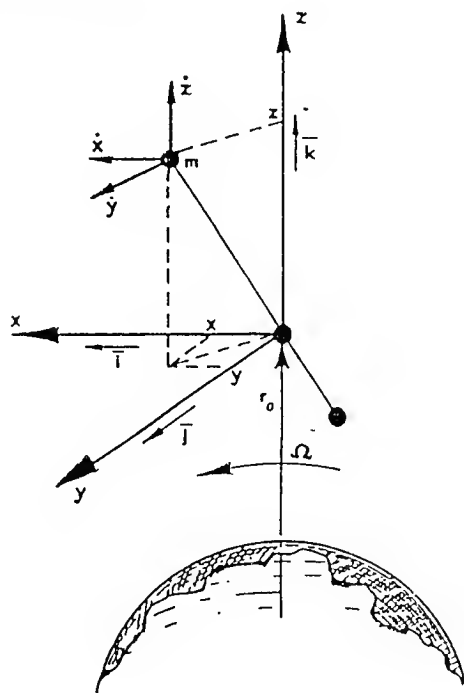
Fig. 3.1.4 - Forze dipendenti dalla velocità.

La combinazione di $\dot{z}$ con ω genera:

$$\Delta\bar{F} = 2dm\,\omega\,\dot{z}\,\bar{i}\,.$$

Tutti gli effetti sopra analizzati vengono introdotti (fig. 3.1.5) nelle equazioni di equilibrio di una massa dm:

$$\bar{F}_\theta = dm\,[(\ddot{x} + 2\omega\dot{z})\,\bar{i} + (\ddot{y} + \omega^2 y)\,\bar{j} + (\ddot{z} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z)\,\bar{k}]\ ,$$

dove $\bar{F}_\theta$ è la risultante di tutte le forze esterne applicate a dm (comprese le vincolari).
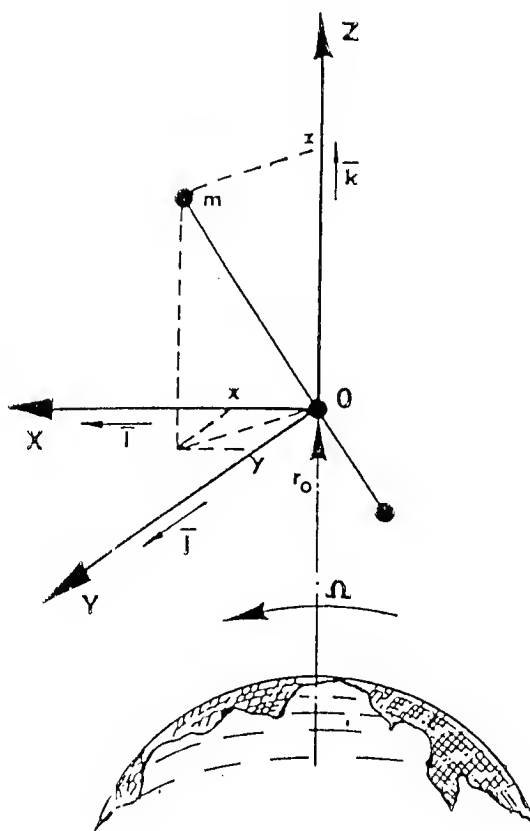
Fig. 3.1.5 - Equazioni del moto di un sistema spaziale a filo.

3.1.2 *Approccio con il problema di tre corpi*

Un altro approccio che si avvale sostanzialmente dell'impostazione del problema dei 3 corpi semplificato, che si propone qui all'attenzione del lettore, appare assai più pregnante e capace di dar conto di tutte le scelte operate nell'approccio precedentemente descritto.

L'asse costituito dalla congiungente il Sole con il pianeta è dotato di velocità angolare, che risulta piccola e si trascura. Allo stesso modo si trascurano i termini di gradiente di gravità solare, limitandosi a trattare casi in cui *la distanza fra il veicolo e il pianeta è molto piccola rispetto alla distanza del 1° punto di Lagrange fra pianeta e Sole.*

Resta, quindi, da considerare la gravità del pianeta.

Il pianeta, il veicolo e il satellite costituiscono, quindi, un sistema di tre corpi, nel quale certamente il satellite non influisce sui restanti. Anche la massa del veicolo è molto piccola: utilizzando l'approccio dei tre corpi semplificato, essa potrà poi essere fatta tendere a zero (*La distanza del 1° punto di Lagrange fra pianeta e veicolo è di pochi millimetri dal baricentro del veicolo*).

Le figg. 3.1.6 e 3.1.7 presentano riferimenti e geometrie rispettivamente per moti del satellite nel solo piano orbitale del veicolo e con componenti anche ad esso normali.

Su tali basi si può quindi procedere ad una analisi della dinamica del satellite a filo. Siano:

M = massa del pianeta,
m = massa del veicolo madre,
ξ, η, ζ = coordinate su assi ruotanti intorno a ζ con velocità ω,
U = potenziale dell'unità di massa del satellite.

Le equazioni della dinamica sono le seguenti:

$$\ddot{\xi} - 2\,\omega\,\dot{\eta} - \omega^2 \xi = \frac{\partial U}{\partial \xi}\,,$$

$$\ddot{\eta} + 2\,\omega\,\dot{\xi} - \omega^2 \eta = \frac{\partial U}{\partial \eta}\,,$$

$$\ddot{\zeta} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}\,.$$
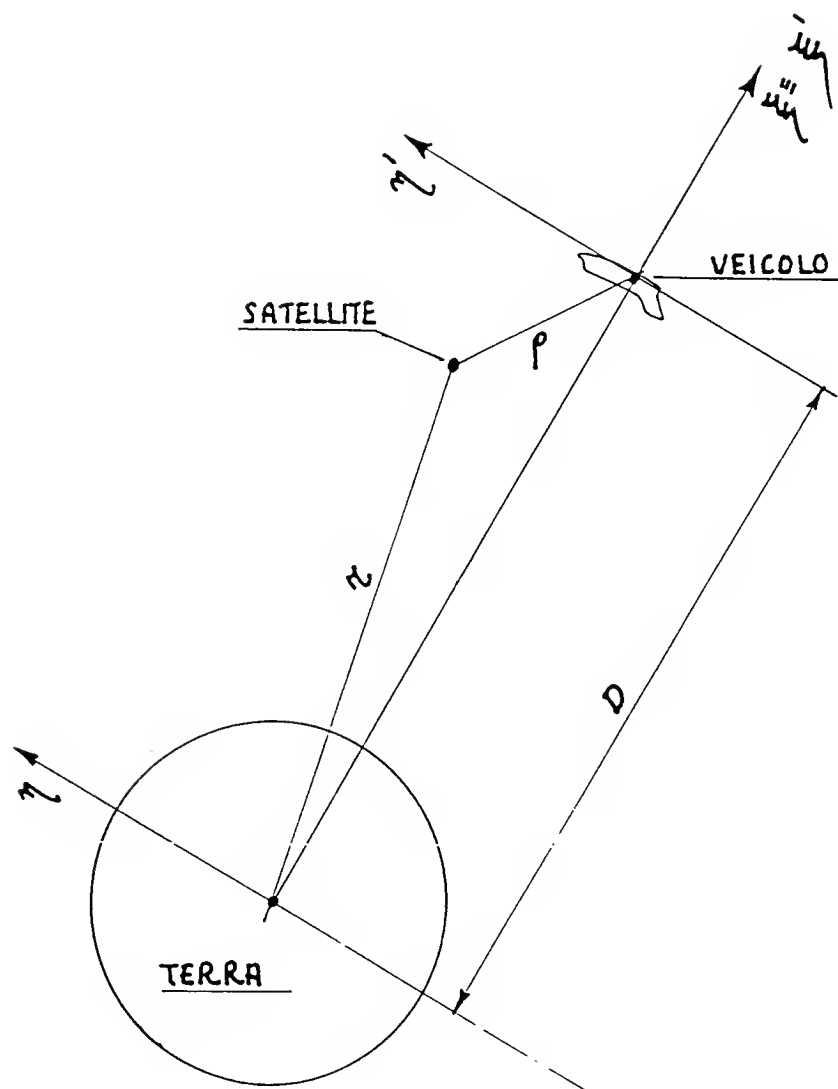
Fig. 3.1.6 - Il «satellite a filo» terzo corpo nel problema dei 3 corpi.
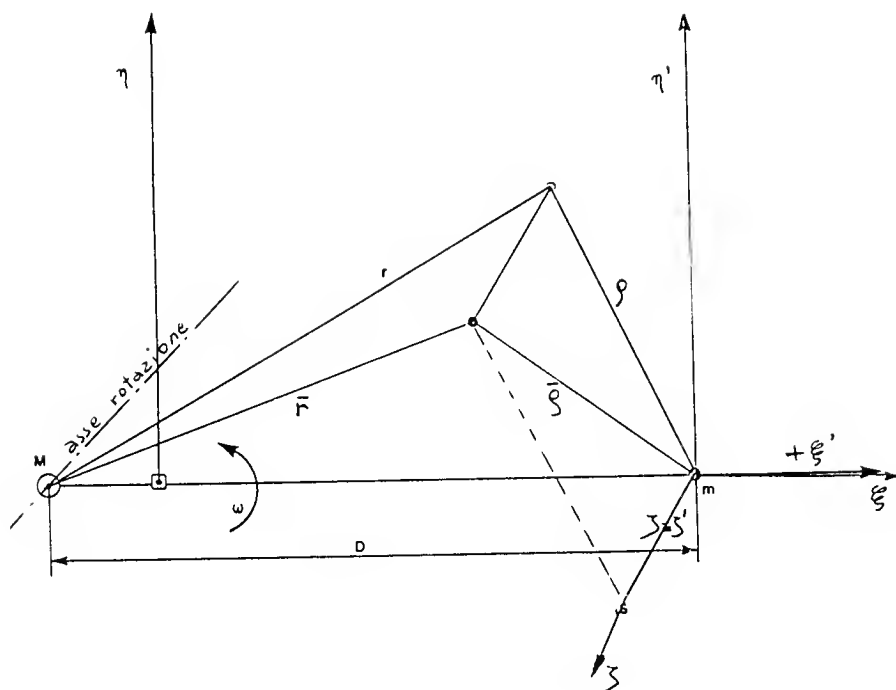
Fig. 3.1.7 - Riferimenti e geometria per il problema dei tre corpi «ristretto».

Valgono le seguenti espressioni:

$$U=\left[\frac{M}{\bar{r}}+\frac{m}{\bar{\varrho}}\right], \qquad \text{(se } G=K^2=1\text{)},$$

$$\omega^2=\frac{M+m}{D^3}$$

dove:

$$r^2=\left(\xi+\frac{m}{M+m}D\right)^2+\eta^2; \quad \bar{r}^2=r^2+\zeta^2 ;$$

$$\varrho^2=\left(\xi-\frac{M}{M+m}D\right)^2+\eta^2; \quad \bar{\varrho}^2=\varrho^2+\zeta^2 .$$

Posto:

$$2\phi=M\left(\frac{r^2}{D^3}+\frac{2}{\bar{r}}\right)+m\left(\frac{\varrho^2}{D^3}+\frac{2}{\bar{\varrho}}\right),$$

si ha per le equazioni della dinamica l'espressione:

$$\ddot{\xi}-2\,\omega\dot{\eta}=\frac{\partial\phi}{\partial\xi},$$

$$\ddot{\eta}+2\,\omega\dot{\xi}=\frac{\partial\phi}{\partial\eta},$$

$$\ddot{\eta}=\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}.$$

Nella espressione di 2ϕ, i termini $\frac{r^2}{D^3}$ e $\frac{\varrho^2}{D^3}$ rappresentano gli effetti delle forze centrifughe, i termini $\frac{2}{\bar{r}}$ e $\frac{2}{\bar{\varrho}}$ rappresentano invece gli effetti delle forze gravitazionali.

Si effettui ora il seguente combinamento di coordinate:

$$\xi = + \frac{M}{M+m} d + \xi' ,$$

$$\eta = \eta' ,$$

$$\zeta = \zeta' .$$

Le equazioni della dinamica assumono la forma:

$$\ddot{\xi}' - 2\,\omega \dot{\eta}' = \frac{\partial \phi}{\partial \xi'} ,$$

$$\ddot{\eta}' + 2\,\omega \dot{\xi}' = \frac{\partial \phi}{\partial \eta'} ,$$

$$\ddot{\zeta}' = \frac{\partial \phi}{\partial \zeta'} .$$

Valgono le seguenti relazioni:

$$\varrho^2 = \xi'^2 + \eta'^2 ; \quad \bar{r}^2 = r^2 + \zeta^2 ;$$

$$r^2 = (\xi' + D)^2 + \eta'^2 = 2\xi' D + D^2 + \varrho^2 ;$$

$$\frac{1}{\bar{r}} \cong \frac{1}{D} \left[1 + \frac{\xi'}{D} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varrho}{D} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{\xi'}{D} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta}{D} \right)^2 + \dots \right] ;$$

$$\frac{r^2}{D^3} + \frac{2}{\bar{r}} = \frac{3}{D} + 3 \frac{\xi'^2}{D^3} - \frac{\zeta^2}{D^3} + \dots ;$$

e, quindi, ricordando che $\frac{M}{D^3} = \omega^2 - \frac{m}{D^3}$, si ottiene anche:

$$2\phi = + 3\,\omega^2 \xi'^2 - M \frac{\zeta^2}{D^3} - 2m \frac{\xi'^2}{D^3} + m \frac{\eta'^2}{D^3} + \frac{2m}{\bar{\varrho}} +$$

a meno di una costante.

Con unità di misura per cui $M=1$, $\omega=1$, posto $m^*=\frac{m}{M}$, si ha

$$D^3=m^*+1$$

e

$$2\phi=+3\xi'^2+\frac{2}{\bar{\varrho}}m^*-2\,\frac{\xi'^2}{D^3}m^*+\frac{\eta'^2}{D^3}m^*-\frac{\zeta^2}{D^3}\,.$$

In definitiva le equazioni della dinamica diventano:

$$\ddot{\xi}'-2\dot{\eta}'+\left(\frac{m^*}{\bar{\varrho}^3}+\frac{2m^*}{1+m^*}-3\right)\xi'=0\ ,$$

$$\ddot{\eta}'+2\dot{\xi}'+\left(\frac{m^*}{\bar{\varrho}^3}-\frac{m^*}{1+m^*}\right)\qquad\eta'=0$$

$$\ddot{\zeta}'+\left(\frac{m^*}{\bar{\varrho}^3}+\frac{1}{1+m^*}\right)\qquad\zeta'=0.$$

Ove $m^*\to 0$ $(m\to 0)$, si ha:

$$\ddot{\xi}'-2\dot{\eta}'-=\xi'=0\ ,$$

$$\ddot{\eta}'+\qquad 2\dot{\xi}'=0\ ,$$

$$\ddot{\zeta}'+\qquad \zeta=0\ .$$

Il termine $-3\,\xi'$ nella prima equazione, già trovato nell'altro approccio, sembra discendere, dalle sole forze gravitazionali. Un più attento esame rivela però che nella espressione di

$$\frac{r^3}{D^3}+\frac{2}{\bar{r}}\quad \text{compaiono i termini}$$

$$3\,\frac{\xi'^2}{D^3}\,,\quad \frac{\varrho^2}{D^3}\,,\quad -\frac{\varrho^2}{D^3}$$

il secondo proveniente dalle forze centrifughe, e gli altri dalle gravitazionali. Il secondo ed il terzo termine si elidono, ma se si vogliono gli effetti separati della centrifugazione e della gravitazione, si può osservare che a meno di infinitesimi di ordine superiore $|\varrho| \cong |\zeta'|$ e quindi l'effetto totale consta di due parti gravitazionali e una parte centrifuga.

3.1.3. *Equilibrio del satellite*

Le relazioni ottenute nel precedente paragrafo sono le accelerazioni cui, il satellite è assoggettato rispetto al riferimento ξ', η', ζ dipendenti dalle posizioni e dalle velocità rispetto allo stesso sistema, per effetto delle attrazioni Newtoniane, degli effetti di Coriolis dovuti al moto del sistema di riferimento. In effetti il legame rappresentato dal filo introduce forze esterne al satellite e determina certi valori delle componenti di accelerazione.

In fig. 3.1.8 ad esempio si può osservare l'equilibrio. Nel piano η', ξ' il satellite è soggetto ad un campo di accelerazione $\ddot{\xi}'$ mentre è trattenuto dal filo. Nel piano ζ, ξ' esso è soggetto ad un campo di accelerazioni $\ddot{\xi}'$ e $\ddot{\zeta}$, mentre è trattenuto dal filo.

La fig. 3.1.9 rappresenta una via intuitiva per rendersi conto che nel moto di librazione nel piano trasversale le forze di richiamo sono più intense che nel piano orbitale. Un satellite, disturbato longitudinalmente in posizione, procede sulla traiettoria, sia pure anticipando o ritardando. Se disturbato trasversalmente si pone su una traiettoria che rispetto alla precedente ha moti oscillatori, perché su un piano inclinato rispetto a quello della precedente.

Nella trattazione esposta in 3.1, si è supposto che l'origine del sistema di riferimento ξ', η', ζ compia attorno alla Terra orbite circolari (con velocità angolare costante). Il baricentro di un sistema satellitare composto di più parti ma privo di forze esterne applicate può compiere una tale orbita (come anche orbite di altra natura geometrica). In quel che segue faremo ancora riferimento ad orbite circolari, lasciando al lettore di immaginare i necessari ampliamenti dell'analisi atti a comprendere altre orbite, e penseremo all'origine del sistema di riferimento come al baricentro del sistema orbitante.

3.2. *Moti di librazione*

Il sistema costituito dal «veicolo madre», dal «filo» e dal satellite costituisce un «manubrio», nel quale il filo per effetto dei gradienti gravitazionali risulta teso se
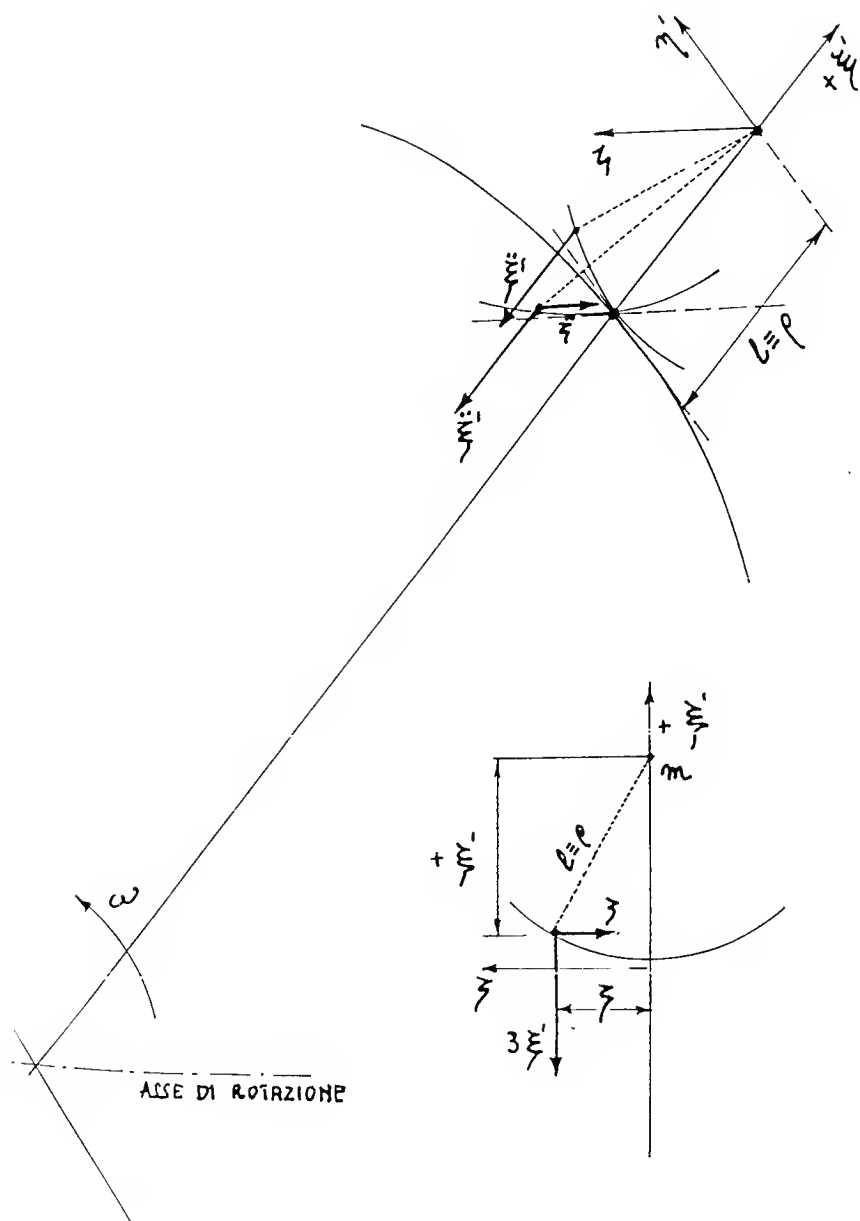
Fig. 3.1.8 - Particolari del piano ζ, ξ'.
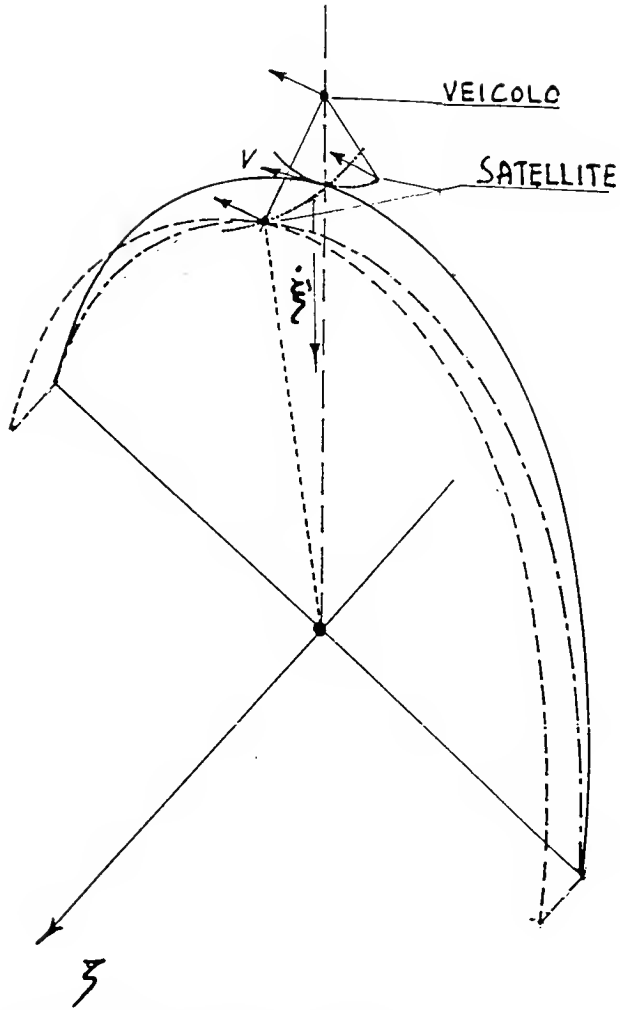
Fig. 3.1.9 - Perturbazione nel piano trasversale.

$$\begin{cases} \eta' = 0 \\ \dot{\eta}' = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \zeta = 0 \\ \dot{\zeta} = 0 \end{cases}$$

(lo si deduce anche dalle equazioni della dinamica). Tale stato è anche stabile, nel riferimento ξ', η' e z e sono possibili attorno ad esso moti detti di librazione, le cui equazioni, posto $\theta = \text{arc sin} \dfrac{\eta'}{l}$ e

$\phi = \text{arc sin} \frac{\zeta}{l}$, sono, (fig. 3.1.10):

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = -3\,\omega^2 \sin\theta \cos\theta \\ \ddot{\phi} = -4\,\omega^2 \sin\phi \cos\phi \end{cases}$$

rispettivamente nel piano orbitale e nel piano normale.

È interessante notare come, per grandi oscillazioni in θ e ϕ, il filo può risultare in bando (cessare di essere teso), generando così intuibili comportamenti qui non analizzati. Nella fig. 3.1.10 sono riportati da [3], i valori della tensione nel filo in funzione di θ per vari θ_{max}. Le zone con valori minori di zero darebbero luogo al «bando», che si verifica per $\theta_{max} = 65°$ e $\phi_{max} = 60°$ circa.

3.3. *Trasferimento di quantità di moto*

Il filo è un dispositivo capace di provocare trasferimenti di quantità di moto angolari, nel moto rispetto al pianeta, fra le due masse del manubrio.

1) TRASFERIMENTO per cambiamento di lunghezza

Il distanziamento di due masse lungo il filo, attuato a $\dot{\theta} = 0$, ovviamente, riduce la q.d.m. angolare della massa che si avvicina al pianeta e, di altrettanto, aumenta l'altra.

2) TRASFERIMENTO per oscillazione

Durante una oscillazione, nel piano orbitale, la q.d.m. delle due masse cambia continuamente, a somma costante, realizzandosi un trasferimento periodico di q.d.m. fra le due masse.

3) TRASFERIMENTO per rotazione

La rotazione del manubrio provoca anch'essa un trasferimento periodico di q.d.m. fra le due masse.

3.4. *Gradiente gravitazionale*

Si consideri il sistema satellitare nella configurazione stabile $\eta' = 0$, $\dot{\eta}' = 0$, $\zeta = 0$, $\dot{\zeta} = 0$. Ogni punto di ξ, lungo il filo, è sede di un valore
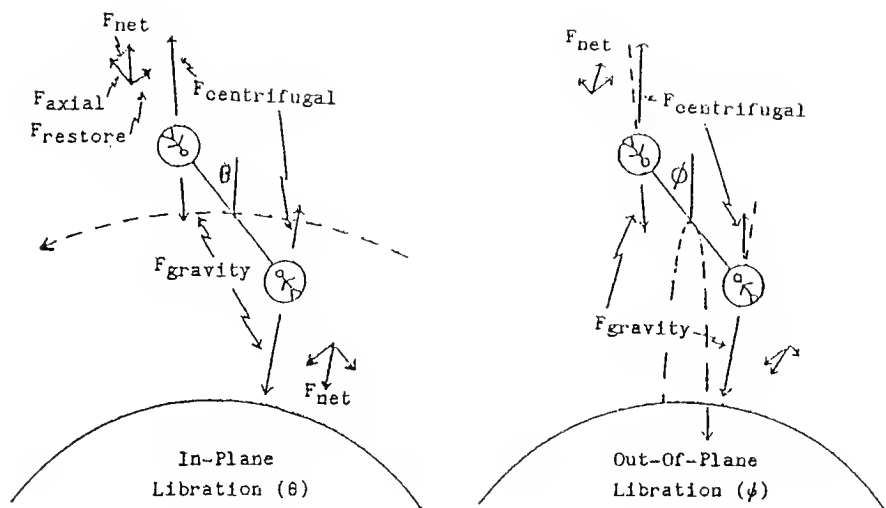
Fig. 3.1.10 - Librazioni di un manubrio in orbita circolare. (Da bibl. [3]).

locale di gravità-apparente, la quale, come già evidenziato, ha origine da due contributi:

1) la diversa attrazione gravitazione a_g del pianeta rispetto alla quota del baricentro,
2) la diversa accelerazione centripeta a_c, a parità di velocità angolare, rispetto alla quota del baricentro.

Alla quota del baricentro ($\xi = 0$) l'attrazione del pianeta è esattamente uguale alla accelerazione centripeta. Altrove l'accelerazione apparente è la differenza $a_a = a_g - a_c$ (le accelerazioni si intendono positive se dirette verso M)

$$a_g = GM \frac{1}{(D+\xi)^2} \cong D\omega^2 \left(1 - 2\frac{\xi}{D}\right)$$

$$a_c = \omega^2 (D+\xi) \qquad = \omega^2 D \left(1 + \frac{\xi}{D}\right)$$

essendo $GM/\mathrm{D}^2 = \omega^2 D$.

Quindi,

$$a_a = a_g - a_c = -\omega^2 D \left(2\,\frac{\xi}{D} + \frac{\xi}{D}\right) = -\omega^2 D \left(2\,\frac{\xi}{D} + \frac{\xi}{D}\right)$$

$$= -3\,GM\,D\left(\frac{\xi}{D}\right) = -3\,\omega^2\,D\left(\frac{\xi}{D}\right) .$$

Poiché ξ può essere compreso fra zero e valori in modulo molto piccoli rispetto a D, possono essere realizzate lungo ξ stazioni a «microgravità», molto utile per vari esperimenti scientifici. Stazioni a gravità ridotta possono anche servire per l'immagazzinamento di combustibili o altri materiali.

4. Principali operazioni da attuarsi per l'effettuazione delle missioni

4.1. *Svolgimento e retrazione*

Si consideri ancora una massa *dm* del satellite appartenente al sistema veicolo-satellite a filo, collocate a distanze l dal baricentro di detto sistema, ove hanno origine ξ' e η', ad una anomalia θ rispetto a ξ' in senso antiorario (fig. 4.1.1).

Ci si limita qui a verificare l'esistenza di particolari traiettorie di *dm*, ed esattamente traiettorie a θ costante.

Valgono le seguenti relazioni geometriche e cinematiche

$$\begin{cases} \xi' = l\cos\theta \\ \eta' = l\sin\theta \end{cases} , \qquad \begin{cases} \dot{\xi}' = l\cos\theta \\ \dot{\eta}' = l\sin\theta \end{cases} .$$

Valgono inoltre le seguenti espressioni delle componenti di forze di gravitazione e complementari applicate a *dm* (nel piano ξ', η'):

$$\begin{cases} F_{\xi'} = 3\ dm\ \omega^2 \xi' + 2\ dm\ \omega \dot{\eta}' \ ; \\ F_{\eta'} = -2\ dm\ \omega \dot{\xi}' \ . \end{cases}$$

Fig. 4.1.1 - Tecniche di svolgimento e retrazione.

4.2. *Strategie di controllo della configurazione*

Durante le manovre di svolgimento e rotazione e durante la fase di impiego, possono manifestarsi oscillazioni di varia natura. Alcune di esse, principalmente nel piano orbitale, possono essere attenuate con opportune «strategie». L'azione di controllo può svolgersi secondo varie forme, tra cui:

— tensione nel filo,
— spinta,
— generatori di spinta,
— masse mobili,
— «tether» rigido, braccio mobile,
— aerodinamica.

Un esame dettagliato di ciascuno di questi mezzi e delle sue possibilità esce dallo scopo della presente analisi, e per esso si rimanda alla letteratura. Le azioni esercitabili attraverso la tensione nel filo sono invece spiegabili con gli stessi fenomeni dinamici fin qui illustrati. Le oscillazioni nel piano orbitale (librazioni) possono essere smorzate rilasciando ulteriormente il filo mentre il filo stesso è nella fase regressiva e richiamandolo quando è in fase progressiva. Le oscillazioni longitudinali sono smorzate dalla dissipazione di energie nel filo.

Alla *dm* è applicata inoltre la trazione del filo. Essa ha componente nulla perpendicolarmente al filo stesso (e se si trascura la differenza fra C.G. e punto di vincolo del filo perpendicolarmente a $\vec{l}$). In tale direzione l'equilibrio è quindi dato da

$$F_{\xi'} \sin\theta - F_{\eta'} \operatorname{ocs}\theta = 0 \ .$$

Tenuto conto delle espressioni di $F_{\xi'}$ e $F_{\eta'}$, delle relazioni geometriche e di quelle cinematiche, si ottiene

$$\frac{\dot{l}}{l} = -\frac{3}{2}\,\omega \sin\theta \cos\theta \ .$$

Posto $\alpha = +\frac{3}{2}\omega \sin\theta \cos\theta$, esiste la soluzione

$$l = l_o \, e^{-\alpha t}$$

con $\alpha > 0$ nel I e III quadrante (traiettorie di retrazione) e $\alpha < 0$ nel II e IV quadrante (traiettorie di svolgimento).

La componente della direzione del filo della forza di gravitazione è

$$F_l = F_{\xi'} \cos\theta + F_{\eta'} \sin\theta$$

e sostituendo:

$$F_l = 3\ dm\ \omega^2 l \cos^2\theta\ .$$

D'altra parte, l'accelerazione di dm è

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = \alpha^2 l = \frac{9}{4}\ \omega^2 l \sin^2\theta \cos^2\theta = -\alpha\ \dot{l}$$

mentre la sua velocità è

$$\frac{dl}{dt} = -\alpha\ l = -\frac{3}{2}\ \omega \sin\theta \cos\theta\ l\ .$$

Indicata con T la trazione nel filo, deve essere

$$(F_l - T) = dm\ \frac{d^2 l}{dt^2}\ ,$$

da cui

$$T = F_l - dm\ \frac{d^2 l}{dt^2}\ .$$

In definitiva si ha

$$T = \left(3 - \frac{9}{4} \sin^2\theta\right)\ dm\ \omega^2 \cos^2\theta\ l\ .$$

Tale valore è certamente positivo e risulta funzione di θ. Se dm si trova ad anomalia θ con lunghezza l_o del filo, alla velocità

$$v = \frac{3}{2}\ \omega \sin\theta \cos\theta\ l_o$$

e sottoposto alla trazione del filo predetta, la sua traiettoria sarà una esponenziale di l nel tempo, a θ costante.

In pratica si realizzano traiettorie (fig. 4.1.1) di cui quelle a θ costante sono asintoti.

4.3. *Amplificazione e attenuazione di moti*

I moti di librazione e di «spin» (cioè di rotazione attorno al baricentro del sistema «veicolo satellite a filo», possono essere amplificati (o attenuati), agendo attraverso la trazione nel filo. L'attenuazione è un'operazione già accennata al paragrafo precedente, almeno per la librazione. L'amplificazione si ottiene esercitando trazione (e recupero) nel filo quando la trazione è massima, e rilasciando quando essa è minima. Si ottiene così un effetto di «pompaggio» nel quale l'energia trasmessa quando la trazione è più elevata è minore di quella asportata quando la trazione è meno elevata.

5. Alcuni aspetti della dinamica di un modello continuo

5.1. *Concetti generali e problema esempio*

Il modello discreto, con masse concentrate per il veicolo madre e per il satellite e con filo privo di massa (distribuita), consente di studiare molti aspetti della dinamica del sistema, fino a ben precisi livelli di approssimazione.

Se si prende in esame un modello che consideri la massa distribuita del filo e la sua elasticità, il panorama dei problemi e di comportamenti che possono essere esaminati si allarga enormemente.

A titolo di introduzione a tale panorama, si riportano qui alcune considerazioni riguardanti i fenomeni dinamici che intervengono nel filo, in particolare mentre se ne opera lo svolgimento o la retrazione, mentre cioè il suo punto vincolato al veicolo madre cambia nel tempo.

La dinamica dei «tether» (per i problemi considerati in questo capitolo, la ref. [3] costituisce un valido aiuto), così come quella di ogni altra struttura, può essere considerata in una analisi lineare come la sovrapposizine di onde di propagazione. Ciò richiede lo studio della dinamica della propagazione lungo il tether con le opportune condizioni al contorno. Con riferimento ad un sistema di riferimento lagrangiano (un sistema, cioè che introduce una corrispondenza biunivoca tra una coordinata longitudinale ed ogni sezione del tether), durante il rilascio

ed il recupero il tether può essere considerato come composto da una parte a riposo e da una soggetta al fenomeno di propagazione. Queste due parti sono separate da una sezione che cambia col tempo, cioè la sezione del tether che limita la parte vincolata al riposo cambia col tempo (la restante parte è libera di muoversi e di vibrare ed ha la sezione opposta soggetta alle condizioni al contorno imposte dal satellite).

I fenomeni di propagazione di maggior interesse da un punto di vista pratico sono i seguenti:

1) Onde trasversali, seguenti un comportamento di corda vibrante, dove sia le forze inerziali che la tensione nel tether — in combinazine con la curvatura locale — sono gli elementi più importanti dell'equilibrio dinamico.
2) Onde longitudinali, rappresentate matematicamente dalla equazione della corda vibrante, dove le forze inerziali e le forze interne longitudinali dovute alla deformazione elastica, sono gli elementi più importanti dell'equilibrio dinamico.

La dipendenza dal tempo della sezione che vincola la parte a riposo richiede l'analisi della riflessione dell'onda che viaggia verso la parte a riposo. Tale riflessione genera un'onda che viaggia verso l'esterno e le cui caratteristiche devono essere determinate.

Questo capitolo tratta della necessità di avere una parte esterna a riposo (non solamente le sezioni di contorno). Perciò le sezioni di contorno si comportano come delle superfici dove i fenomeni dinamici interni subiscono una riflessione.

Si fa ovviamente riferimento ad una struttura monoassiale di sezione costante, entro la quale categoria il tether può essere qualificato. Carichi longitudinali addizionali dovuti alla microgravità permettono di tenere conto di piccoli carichi di tensione o di compressione senza incorrere in fenomeni critici.

5.2. *Fondamenti fisico-matematici*

Dapprima richiamiamo alcuni concetti con riferimento soltanto al caso delle onde longitudinali. Il lettore potrà facilmente estendere l'analisi alle onde trasversali. Il problema può essere analizzato per mezzo di una equazione di continuità e di una condizione di equilibrio.

Se $\sigma = \sigma(x, t)$ è lo stress nel punto x al tempo t e $u = u(x, t)$ è la velocità, l'equazione linearizzata dell'equilibrio è

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\varrho \frac{\partial u}{\partial t} . \tag{1}$$

D'altra parte l'equazione linearizzata della continuità è

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{t}\frac{\partial \sigma}{\partial t} . \tag{2}$$

Se poniamo $c^2 = E/\varrho$, otteniamo,

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{1'}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \tag{2'}$$

Le soluzioni generali delle equazioni (1′) e (2′) sono

$$\sigma = \varrho_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varrho_2\left(t + \frac{x}{c}\right) \tag{3}$$

$$u = u_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + u_2\left(t + \frac{x}{c}\right) . \tag{4}$$

Le equazioni (3) e (4) indicano che il moto della sbarra è composto da due onde: una che viaggia nella direzione delle x positive ed un'altra che viaggia nella direzione delle x negative.

Sulla base di queste considerazioni è possibile ottenere una relazione tra p ed u per ogni singola onda.

Se $t_1 = t - \frac{x}{c}$ e $t_2 + t + \frac{x}{c}$, *da 3) e 4) si ottiene:*

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial p_2}{\partial t_2} - \frac{\partial p_1}{\partial t_1}\right) \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u_2}{\partial t_2} . \tag{6}$$

Considerando l'equazione (1), da (5) e da (6) abbiamo la relazione

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial p_1}{\partial t_1}-\frac{\partial p_2}{\partial t_2}\right)=\varrho\left(\frac{\partial u_1}{\partial t_1}+\frac{\partial u_2}{\partial t_2}\right). \tag{7}$$

Se $p_2=0$, $u_2=0$, l'equazione (7) fornisce la relazione

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_1}=\varrho c\,\frac{\partial u_1}{\partial t_1}=\frac{E}{c}\,\frac{\partial u_1}{\partial t_1}.$$

D'altra parte se $p_1=0$, $u_1=0$ abbiamo la relazione

$$\frac{\partial p_2}{\partial t_2}=-\varrho c\,\frac{\partial u_2}{\partial t_2}=-\frac{E}{c}\,\frac{\partial u_2}{\partial t_2}.$$

Con le condizioni iniziali $u_1(t_0)=0$, $p_1(t_0)=0$ o, separatamente, $p_2(t_0)=0$, $u_2(t_0)=0$ valgono le seguenti relazioni per ogni onda viaggiante:

$$u_1\left(t-\frac{x}{c}\right)=\frac{c}{E}\,p_1\left(t-\frac{x}{c}\right) \tag{8}$$

$$u_2\left(t+\frac{x}{x}\right)-=\frac{c}{E}\,p_2\left(t+\frac{x}{c}\right). \tag{9}$$

Tali relazioni ci mettono in grado di determinare uno dei due valori u_1 oppure p_1 quando ne conosciamo l'altro (equazioni 8) ed inoltre di determinare uno dei valori u_2 oppure p_2 quando ne conosciamo l'altro (equazione 9).

Questi sono rispettivamente in relazione con il comportamento separato delle due onde in propagazione.

5.3. *Riflessione sulla sezione dipendente dal tempo*

Le condizioni al contorno di solito considerate nelle applicazioni pratiche per sbarre monoassiali elastiche sono l'estremo libero ($\sigma=0$) e l'estremo incastrato ($u=0$). Alle estremità dove avviene il rilascio, si verifica

che $u(x_c)=0$ dove $x_c=x_c(t)$ è la sezione dipendente dal tempo che si può considerare come fissa e $dx_c/dt=v$ è la velocità di spostamento del vincolo. In questa notazione, x_c è una coordinata della barra non deformata.

Per una prima analisi del comportamento di una sezione fissa dipendente dal tempo possiamo considerare il problema di una barra elastica che ha un estremo libero ad $x=0$ ed un estremo vincolato con $u(x_c)=0$ ad $x_c=l_o+cv$, dove l_o sono costanti. La sbarra è soggetta in $x=0$ ad una forza specifica l_1 estensionale esterna indipendente dal tempo t.

Una tale forza produce un'onda che viaggia nella direzione delle x positive; quando tale onda raggiunge la sezione x_c di vincolo mobile viene generata un'onda riflessa di forza specifica p_2 che viaggia nella direzione delle x negative.

Determineremo ora le caratteristiche dell'onda riflessa, prima che essa raggiunga la sezione $x=0$.

Allo scopo di determinare l'onda riflessa per mezzo di un bilancio di energia è necessario disporre di una valutazione dell'energia scambiata all'estremo vincolato. Il vincolo ha un bilancio di energia diverso da zero e l'onda riflessa può essere determinata come segue. È già stato introdotto lo spostamento sezione dove è imposto il vincolo durantc il tempo. Tale spostamento corrisponde alla deformazione interna della sbarra.

L'intervallo $dx=v\,dt$ durante dt, è sottoposto ad una variazione di lunghezza $dl=-(u_1+u_2)dt$ con un allungamento $E=dl/v\,dt$.

D'altra parte la tensione finale in $v\,dt$ deve essere $\sigma=p_1+p_2==(U_1-U_2)\,E/c$ il che significa un allungamento $\epsilon=(u_1-u_2)/c$. Uguagliando le due espressioni dell'allungamento si ottiene:

$$u_2=-u_1\,\frac{c-v}{c+v}\,. \tag{10}$$

Questo risultato coincide con quello dell'applicazione della soluzione del problema di Goursat, Daboux e Cauchy, con la condizione $u=0$ in $x=l_o+vt$. Oltre alla coincidenza con i ben noti risultati della analisi della corda vibrante, il modello proposto presenta il vantaggio di essere applicabile a problemi più complessi quali i sistemi dispersivi.

5.4. *Estensione ad una velocità di propagazione dipendente dalla posizione longitudinale*

Il presente paragrafo riguarda l'estensione dell'analisi al caso in cui le equazioni (1′) e (2′) diventano come segue

$$(1'') \qquad \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}$$

$$(2'') \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \, .$$

Questo caso comprende la dinamica di onde trasversali in tethers dove il carico longitudinale dipende dalla posizione per effetto della microgravità. Siccome $c(x)$ non è costante ma una funzione di x, $c = c(x)$ le espressioni (3) e (4) non sono più valide, ed è necessario trovare un modo appropriato di soluzione. In un articolo precedente, [6], l'autore proponeva che la soluzione generale delle equazioni (1″) fosse composta da due onde che viaggiassero in opposte direzioni con velocità dipendente da x. Tali onde si riducono alle equazioni (3) e (4) quando $c(x)$ diventa una costante C. se ϕ indica σ oppure u quando necessario, si può adottare la seguente espressione (quando $c(x) =$ costante e $K = 1$ l'espressione proposta si riduce a (3) e a (4)):

$$(11) \qquad \phi = \phi_1 \left(t - \int \frac{dx}{K\,c(x)} \right) + \phi_2 \left(t + \int \frac{dx}{K\,c(x)} \right)$$

dove K è una costante arbitraria e $\pm K\,c(x)$ potrebbe essere considerata come la velocità di propagazione in x. Ovviamente, non tutte le funzioni ϕ_1 e ϕ_2 sono utili per soddisfare la (1″). Il problema si riduce ora alla determinazione delle funzioni ϕ_1 e ϕ_2, qualora dovessero esisterne, che soddisfino alla (1″). Le funzioni ϕ_1 e ϕ_2 possono essere esaminate separatamente.

Se poniamo $s = t - \displaystyle\int \frac{dx}{K\,c(x)}$, si ottiene

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{d\phi_1}{ds} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{d\phi_1}{ds} \left(- \frac{1}{K c(x)} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} = \frac{d^2\phi_1}{ds^2} \left(\frac{1}{K c(x)} \right)^2 + \frac{d\phi_1}{ds} \left(\frac{1}{K} \frac{c^1(x)}{c^2(x)} \right) , \quad \left(c^1(x) = \frac{d\, c(x)}{dx} \right) ,$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \frac{d\phi_1}{ds} \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{d\phi_1}{ds} ; \quad \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} = \frac{d^2\phi_1}{ds^2} .$$

Richiamando ora la (1″), otteniamo

$$(12) \qquad \frac{d^2\phi_1}{ds^2} \frac{1}{K^2} + \frac{d\phi_1}{ds} \frac{1}{K} c^1(x) - \frac{d^2\phi_1}{ds^2} = 0 .$$

La funzione ϕ_1, se esiste, deve soddisfare l'equazione (12). Siamo portati alla stessa conclusione per quanto riguarda ϕ_2.

Come esempio, possiamo restringere l'analisi al caso $c = c_o(x)$. Abbiamo che $c^1(x) = c_o$ e che

$$(12') \qquad \left(1 - \frac{1}{K^2} \right) \frac{d^2\phi_1}{ds^2} - \frac{c_o}{K} \frac{d\phi_1}{ds} = 0 .$$

Questa è una equazione differenziale lineare del secondo ordine.

La sua soluzione è del tipo $\phi_1 = e^{ds}$ e, più precisamente

$$(13) \qquad \phi_1 = \exp \left[+ \frac{1}{1-K^2} (-KC_o + ln\ x) \right] .$$

Considerando ora ϕ_2, otteniamo che

$$(13') \qquad \phi_2 = \exp \left(+ \frac{1}{1-K^2} (KC_o + ln\ x) \right] .$$

Se lasciamo che k assuma tutti i valori da zero all'infinito otteniamo per ϕ_1 e per ϕ_2 un insieme completo di funzioni, che ci permettono di esten-

dere il risultato a qualunque funzione tramite integrazione. Tutti i fenomeni dinamici in una struttura dove le equazioni (1″) sono valide e $c = c_o x$ possono essere analizzati da (si vedano le equazioni (13) e (13′)),

$$\phi = \int_0^\infty C_1(K) \cdot \exp\left[+\frac{1}{1-K^2}(-KC_o + ln x)\right] dk +$$

$$+ \int_0 C_2(K) \cdot \exp\left[\frac{1}{1-K^2}(KC_o + ln x)\right] dx.$$

Ovviamente, l'equazione (14) non rappresenta l'unico modo tramite cui espandere per mezzo di un integrazione un tale fenomeno dinamico, ma questo modo di procedere ci permette di considerare delle funzioni componenti quando la velocità di propagazione di ogni x è nota. Come sappiamo, tale velocità è un dato fondamentale per la valutazione dell'onda riflessa, in particolare nel caso di condizioni di vincoli dipendenti dal tempo.

BIBLIOGRAFIA

[1] BLANCO V.M. and CUSKEY Mc: *Basic Physic of the Solar System, Addison-Wesley Publishing Company*, London, 1961.

[2] EHRICKE K.A.: *Space Flight*, Vol. I and Vol. II, D. Van Nostrand Company Inc., Princeton, 1962.

[3] CARROL J.A.: *Guidebook for Analysis of Tether Applications, Final Report on Contract RM4-394049 with the Martin Mariella Corporation*, March 1985.

[4] ANTONA E.: *Superamento e utilizzazione di g nell'attività spaziale*, Conferenza su «300 anni di G», Torino, Ottobre 1986, Centro di Astrodinamica «Giuseppe Colombo».

[5] BEVILACQUA F.: Conferenza sui «300 anni di G», Torino, Ottobre 1986, Centro di Astrodinamica «Giuseppe Colombo».

[6] ANTONA E.: *Rigorosous Approaches to Tether Dynamics in Deployment and Retrieval*, NASA Conference Publication 2458, Tether Dynamics Simulation, Washington, D.C.

Modelli e pregiudizi nella meccanica dei fluidi odierna

Gino MORETTI *

Ogni tentativo di correlazione generale fra entità fisiche è un modello. L'analisi matematica ha permesso di cristallizzare i modelli in espressioni sintetiche, alcune delle quali brillano per semplicità (e quindi per forza espressiva) come la classica equazione $F = ma$ e la popolarissima $E = mc^2$.

Nessun modello, tuttavia, è corretto. Il vero, il giusto, sono asintoti ai quali tentiamo di avvicinarsi, senza sapere di quanto ne distiamo. Talora ci accorgiamo che un modello proprio non va, e lo releghiamo nella categoria dei pregiudizi. Così passò dopo tanti secoli la teoria aristotelica di proporzionalità tra velocità e forza; così dopo alcuni anni la credenza dell'isentropia degli urti.

Si ha quindi, lavorando su un modello, una lenta evoluzione di pensiero e un crescente disagio intellettuale, finché di colpo un nuovo modello viene a sostituirsi al vecchio; la rivoluzione è tanto più benefica e duratura quanto più semplice è l'espressione del nuovo modello. Si pensi alla rivoluzione copernicana, al trionfo delle coniche su cerchi e sulle epicicloidi.

In quella rivoluzione c'è anche molto di più. Infatti, il sistema planetario come lo vediamo noi (o almeno, come l'abbiamo visto fino ad alcuni anni fa) è «spiegato» dal modello in termini di cause ed effetti, mentre il sistema tolemaico è puramente descrittivo.

È bene notare che: 1) l'insoddisfazione crescente per un modello, almeno dal punto di vista dei fisici, può essere solo generata da nuove osservazioni empiriche, 2) fintantoché si rimane nell'ambito del modello prescelto, ogni nuovo risultato dev'essere una conseguenza logica delle premesse. Questo secondo punto è essenzialmente il tema del discorso che segue.

Nell'era classica della meccanica dei fluidi, i modelli erano pochi e di grande bellezza, e i loro limiti erano chiaramente stabiliti. Per esempio, la teoria dei moti stazionari dei fluidi incompressibili non viscosi

* Dept. of Aerospace Engineering, Polytechnic University, Farmingdale, NY, USA.

insegnava che le velocità agli spigoli erano nulle o infinite, e che un moto, uniforme all'infinito, intorno a qualunque figura chiusa, era definito meno di un vortice di intensità arbitraria. Queste erano ovvie violazioni del buon senso fisico, ma erano accettate come necessarie conseguenze del modello prescelto. Tuttavia l'insoddisfazione dianzi menzionata generò due nuovi modelli alla fine del secolo scorso, a integrare il modello precedente. Uno diede luogo ai campi di moto a pelo libero, brillantemente descritti da Kirchhoff e purtroppo alquanto dimenticati. L'altro fu la geniale invenzione di Kutta e Joukowski che è alla base di ogni studio di profili alari.

Le limitazioni del modello incompressibile non viscoso, dal punto di vista pratico, sono molte e non sempre gradevoli. La viscosità naturale si cura di eliminare le singolarità agli spigoli, e di conseguenza anche di generare campi di moto simili a flussi di Kirchhoff e di giustificare il modello di bordo di fuga di Kutta e Joukowski. L'importanza di questi due modelli risiede nella loro capacità di presentare certe soluzioni irrotazionali come possibili casi limite di moti viscosi a numero di Reynolds infinito.

In questi esempi, le equazioni indefinite del moto sono rese definite da un'opportuna scelta di condizioni al contorno e, per ciascuna scelta, la soluzione può essere ottenuta per via analitica inequivocabilmente, sicché la natura stessa delle condizioni al contorno e la dipendenza da esse della soluzione non possono essere oggetto di controversie.

Un modello totalmente diverso è alla base della meccanica dei fluidi compressibili. La propagazione istantanea, tipica dei fluidi incompressibili, è sostituita da una propagazione a velocitè finita, e questo getta una nuova luce sui rapporti tra moti stazionari e non. La densità non è costante; compressioni ed espansioni si sviluppano con tendenze opposte e le compressioni, presto o tardi, diventano incompatibili con una distribuzione di valori differenziale. Modelli di stati stazionari si possono concepire per fluidi compressibili, ma sembrano molto più restrittivi che per fluidi incompressibili. Infatti, per un fluido incompressibile non viscoso, la non stazionarietà è una successione di stati stazionari. Al contrario, nel modello compressibile, la non-stazionarietà sembra essere lo stato naturale, con stati stazionari solo raggiungibili in forma asintotica. Le equazioni di Eulero per stati stazionari sono un modello; il credere alla loro validità fisica è un pregiudizio.

Nell'ambito dei fluidi compressibili, troviamo un gran numero di modelli più ristretti: moti monodimensionali, quasi-monodimensionali, bidimensionali, subsonici, supersonici, transonici, con o senza discontinuità.

In quei rari casi in cui si può ricavare una soluzione analitica, le condizioni al contorno variano radicalmente da un modello all'altro e, se il problema non è stazionario, condizioni iniziali intervengono in modo essenziale.

Ancora una volta, se il trattamento del problema è analitico, esso rimane fedele al modello; le condizioni iniziali e al contorno sono scelte di necessità in accordo con il modello e la soluzione del problema ne consegue coerentemente. Purtroppo, soluzioni analitiche in campi compressibili, anche non viscosi, si trovano solo per rari problemi di grande semplicità e servono essenzialmente di guida all'interpretazione fisica dei fenomeni più complessi. L'analisi numerica è ormai accettata come metodo di studio di problemi della vita reale. Anche qui, tuttavia, si deve scegliere un modello di base. Anche qui bisogna scegliere un insieme di condizioni iniziali e di contorno.

La difficoltà nuova proviene dalla discretizzazione necessaria per usare il calcolatore. Nel fare ciò, è facile fuorviare il modello o le condizioni iniziali e di contorno. È compito dell'analista di far sì che ciò non avvenga. L'analista deve quindi al tempo stesso conoscere la fisica del problema e i metodi numerici: anzi, io credo, dev'essere più un fisico che un matematico!

È doloroso constatare che, ai nostri tempi, il calcolo tende a rimpiazzare il pensiero. La massificazione delle scienze, stimolata dal consumismo tecnologico e accelerata dallo sviluppo delle macchine calcolatrici e, d'altro canto, la furia competitiva hanno messo al bando lo studio della filosofia della natura. Comunicare è ormai pressoché impossibile, paradossalmente, perché i mezzi di comunicazione sono troppi. In pratica, tutti scrivono e nessuno legge. Le rare gemme sono destinate a rimanere nascoste. I lavori citati (ma non necessariamente letti, e tanto meno digeriti) provengono dalle scorie superficiali della letteratura tecnica. Inoltre è difficile comunicare per varie ragioni, di volta in volta o tutt'insieme presenti: L'autore, per troppa familiarità col soggetto, sorvola su informazioni importanti; l'autore non sa scrivere o scrive in una lingua straniera in modo approssimativo ed arruffato; l'autore crede di aver capito il suo problema ma non l'ha sufficientemente approfondito (quanti di noi hanno il coraggio di riconoscere i propri limiti?); l'autore è volutamente oscuro per timore di plagi! E infine, un discorso di quaranta pagine dev'essere compresso in otto per motivi editoriali. D'altro canto, ai giovani immaturi ed inesperti spesso manca, e non per colpa loro, la guida solerte del docente. Responsabile ne è la rilassatezza di costumi nelle scuole di ogni rango dove, per timore di tarpare le ali a

geni in potenza, si trascurano i puntini sulle i, si dà troppa importanza alle definizioni formali che sono difficili da interpretare e, paradossalmente, si stimola una generale tendenza ad accettare luoghi comuni, invece di forzare gli studenti all'autocritica. Di conseguenza, certi modelli diventano facilmente pregiudizi.

Che cosa è infatti un pregiudizio? Un pregiudizio è un modello creduto valido nel seno di un altro, quando non lo è, oppure un modello a validità limitata, esteso arbitrariamente al di fuori del suo campo di validità. Ecco alcuni esempi.

1) Un'idea generale, abbastanza corretta, dei moti di fluidi compressibili, stazionari e non, in condotti ad area variabile si ottiene attraverso calcoli quasi-monodimensionali. Il modello è, anzitutto, limitato a variazioni di area dolci. Inoltre è assai poco rappresentativo nel caso di flussi supersonici, dove il gioco delle caratteristiche e di onde d'urto oblique è essenzialmente multidimensionale. Il pregiudizio di «potersi fare qualche idea» su come il condotto si possa reagire a stimoli esterni conduce soltanto a «qualche idea sbagliata». Pregiudizi di sorta non sono solo errori di principianti. Il pubblico denaro di molti paesi ricchi è sovente sprecato in varie imprese del genere.

2) Un'altra fonte comune di pregiudizi è la confusione tra fenomeni stazionari e non. Lasciamo da parte errori volgari, come la credenza nella costanza di valori d'arresto in moti non stazionari. In una sfera superiore c'è ben di più. I modelli stazionari, che in un primo tempo avevano permesso di semplificare le equazioni del moto e ottenere alcune soluzioni in forma chiusa, rimasero come paradigma anche quando l'avvento dei computers suggerì l'uso di tecniche numeriche. La struttura stessa delle macchine impone formulazioni iterative sicché anche un fenomeno stazionario è numericamente ottenuto attraverso un'evoluzione temporale, sia essa interpretabile fisicamente o no. In entrambi i casi, il cammino è infestato da trappole che il più delle volte sono ostiche a chi è condizionato da pregiudizi di tipo stazionario, anche se sono facili da capire in termini di meccanica dei fluidi classica.

Considerando ogni calcolo numerico come non stazionario, la prima domanda da porsi è se la soluzione numerica possa dipendere dalle condizioni iniziali, e se non vi sia contraddizione col modello teorico prescelto. Questo implica analizzare il processo numerico d'integrazione nel tempo in rapporto con il modello teorico rappresentato dalle equazioni differenziali del moto e, in misura ancor più importante, analizzare il trattamento dei contorni in rapporto con il modello prescelto per il mondo

esterno e con l'interazione fisica di quest'ultimo con i fenomeni occorrenti nella regione di calcolo.

Un breve commento, sul primo punto. La meccanica dei fluidi compressibili, procedendo dalle idee di Riemann, sa che un'evoluzione fisica è il risultato dell'interazione di segnali provenienti da regioni diverse e convergenti in un punto. Questo concetto dev'essere rispettato da ogni codice di calcolo; in altre parole, il codice deve, per quanto possibile, aggiornare i valori fisici in un punto usando soltanto informazioni provenienti dal dominio di dipendenza del punto stesso. Uno dei pregiudizi più diffusi nel primo ventennio di storia della meccanica dei fluidi numerica permetteva di approssimare le derivate spaziali con differenze finite prese all'avanti, all'indietro, centrate, o comunque definite, purché l'espressione tendesse alla derivata spaziale al decrescere dell'intervallo. Solo nell'ultimo decennio l'importanza del dominio di dipendenza e della coerenza fisica, e non solo formale, tra il modello e la sua interpretazione numerica, è stata riconosciuta. Con gran piacere rammento che alcuni fra i primi segnali furono lanciati da questo Politecnico nel 1976, insieme con alcuni dei più efficaci metodi numerici scevri dai pregiudizi di cui sopra.

Quanto al secondo punto, non si dimentichi che le equazioni differenziali del moto (a buon diritto chiamate «indefinite» al tempo di Levi-Civita) *descrivono* qualunque problema nell'ambito di un certo modello, ma che un problema specifico è *definito* dalle sue condizioni inziali e di contorno.

Ci sono contorni rigidi e, sovente, contorni tracciati arbitrariamente in un campo di moto, per necessità pratiche di definizione di una regione finita di calcolo (contorni permeabili). Il modello dei contorni rigidi, per moti non viscosi, prescrive l'annullarsi della componente normale della velocità. Incredibilmente, per molti anni i codici di calcolo aggiunsero a tale condizione altre condizioni affatto arbitrarie, come un certo «principio di riflessione» applicato a tutte le variabili, senza capire che l'unica grandezza fisica che si «riflette» è il segnale procedente lungo la caratteristica ben definita e che la «riflessione» è la reazione della parete al segnale incidente. Il panorama è migliorato notevolmente negli ultimi anni.

Non altrettanto si può dire per i contorni permeabili, dato che siano subsonici. Qui è necessario avere un modello del mondo esterno, e un metodo per rappresentarlo. Tanto per fare un esempio, si consideri un

corpo investito da una corrente subsonica, uniforme all'infinito. Del mondo esterno si conoscono con precisione solo due cose: la temperatura totale, che in condizioni stazionarie si conserva inalterata in tutto il campo, e l'entropia che, in assenza di urti, pure è costante in tutto il campo. Checché avvenga all'interno della regione calcolata, tali due quantità finiranno per penetrarvi, attraverso l'arco del contorno «di entrata», quando le perturbazioni generatesi a distanza finita abbiano raggiunto una distanza sufficientemente grande. È quindi logico interpretare il modello del mondo esterno interagendo i segnali provenienti dall'interno con opportuni segnali provenienti dall'esterno, che trasportino la temperatura totale e l'entropia al contorno permeabile. Purtroppo, in problemi bidimensionali, un altro dato va prescritto sul contorno di entrata. Qui un'aggiunta al modello del mondo esterno si impone. La quantità più innocua da prescrivere sembra sia la pendenza delle linee di corrente. Guardando il problema con la mente di un ingegnere, si può dire che ciò equivale a disporre sul contorno una serie di guide così fatte da deviare la corrente di quanto si vuole senza infirmare l'energia totale. Ovviamente, si cercherà di scegliere una distribuzione di pendenze ragionevole, per esempio quella ottenuta da una soluzione incompressibile a potenziale.

È interessante osservare che uno studio dettagliato del problema mostra che ogni altro modello è un pregiudizio, e che la soluzione conseguente non è «la» soluzione!

Quanto sopra riguarda il modello esterno per ciò che si riferisce alla scelta delle variabili significative. Non migliore è la situazione nei confronti dei metodi proposti (e, purtroppo, sovente accettati) per calcolare punti di contorno (indifferentemente, d'entrata o d'uscita) minimizzando le informazioni dal mondo esterno. Qui regna la confusione fra concetti stazionari e non. È ovvio che, se il contorno è stato arbitrariamente tracciato attraverso il campo di moto, il mondo esterno, vicino al contorno, deve ancora comportarsi come il mondo interno. Se una perturbazione è prodotta nell'interno del campo calcolato, essa tende a propagarsi verso l'esterno. Dovrebbe essere altrettanto ovvio che, arrivando dal contorno, la perturbazione interagisca con ciò che già esiste (e generalmente varia esso stesso) nel mondo esterno, e quindi una nuova perturbazione si muova verso l'interno, e così via. Il pregiudizio alla base delle cosiddette «condizioni al contorno non riflessive» consiste nell'ignorare le onde procedenti dal contorno verso l'interno, creando quindi la condizione paradossale di un flusso che è autodeterminante, qualunque sia il mondo che lo circonda.

Essendo il male assai diffuso, mi sono domandato quali ne fossero le origini. Credo di aver trovato una spiegazione, che si può dividere in due parti. La prima mi è stata suggerita dal fatto che sovente queste condizioni sono attribuite a Sommerfeld il quale, purtroppo, non è più in grado di rifiutarne la paternità. Lavorando in forma analitica sull'equazione di D'Alembert in spazi infiniti (e questo è essenziale), si possono individuare onde che procedono da punti al finito verso l'infinito e viceversa. L'intensità di queste ultime dev'essere nulla all'infinito, in assenza di singolarità. Pertanto, o non esistono affatto o sono affette da coefficienti che tendono a zero all'infinito; considerazioni di questo tipo, insieme con analoghe condizioni a distanza finita, permettono di definire la soluzione del problema dato. Salvo il caso molto particolare in cui non esistano onde provenienti dall'infinito, tali onde sono presenti nella soluzione a distanza finita.

Inoltre, alcuni matematici amano dimostrare certe proprietà sotto condizioni restrittive, generalmente non verificate in casi reali, salvo uno, che essi scelgono ad esempio di controllo del loro teorema. Si pensi ad esempio ad un condotto trattato in forma quasi-monodimensionale; sia il condotto ad area costante nelle zone contenente i contorni permeabili e al di fuori di esso fino a distanze infinitamente grandi. Ogni perturbazione generata nell'interno del condotto si propaga verso l'esterno e fuoriesce dalla zona di calcolo come un'onda semplice: dall'esterno non arriva nessuna perturbazione. Ovviamente, le condizioni al contorno sono «non riflessive» e la soluzione è in ogni istante completamente definita dalle condizioni iniziali e dalle eventuali perturbazioni successive create nell'interno della regione di calcolo. Ogni altro problema, per esempio l'analogo problema in due dimensioni, deve avere differenti condizioni al contorno. Onde circolari provenienti dall'interno di un contorno circolare non sono onde semplici ed esprimono propagazioni verso l'esterno come pure verso l'interno. Di conseguenza, condizioni al contorno «non riflessive» che sopprimono le onde centripete travisano il problema.

3) Molto si è discusso sui meriti ed inconvenienti di due metodi di calcolo per le equazioni di Eulero, l'uno basato sulle equazioni di conservazione di massa, quantità di moto ed energia e l'altro basato sulla teoria delle caratteristiche ed il calcolo esplicito degli urti («shock-fitting»). È interessante notare il pregiudizio dei «conservatori», che un calcolo numerico del secondo tipo non conservi quanto dev'essere conservato. Questo non è vero, se il calcolo è fatto bene; d'altra parte, i «conservatori» dimenticano spesso che i loro codici di calcolo non conservano l'entropia, ovunque essa va conservata!

4) Un esempio di pregiudizi sorti dal voler oltrepassare i limiti di un modello venne alla luce qualche anno fa attraverso i tanti calcoli intesi a trovare metodi efficienti per il calcolo di moto transonici intorno a profili alari. Usando il modello di flusso compressibile a potenziale, risultò che per un dato profilo la portanza, negativa per incidenze negative, restava negativa all'aumentare dell'incidenza fino a circa 2/10 di grado e poi scattava di colpo a valori positivi. Il fenomeno opposto si verificava partendo da valori positivi e diminuendo l'incidenza. Per un breve periodo di tempo, si parlò di «isteresi» nel rapporto incidenza-portanza. Questo è ovviamente un pregiudizio, dato che un fenomeno assai complesso come l'isteresi non può essere collegato a un modello così semplice come il flusso a potenziale. Ben presto, infatti, Salas scoprì che la curva portanza-incidenza poteva avere tre soluzioni nell'intorno dell'incidenza nulla, e che tali soluzioni potevano essere determinate senza ambiguità pur di prescrivere la portanza e calcolare l'incidenza, anziché procedendo alla rovescia come fatto dianzi. Che le anomalie riscontrate nel modello a potenziale siano prive di senso fisico fu poi mostrato studiando lo stesso problema nel modello euleriano, il quale provvede una soluzione unica e continua della portanza in funzione dell'incidenza.

5) In calcoli di problemi stazionari, forzare uno o più valori noti pe la soluzione stazionaria a rimanere costanti nel corso del calcolo, mentre le equazioni non stazionare li trattano come variabili, è un errore abbastanza comune. Il pregiudizio sta nel credere che ciò acceleri la convergenza verso la soluzione asintotica, quando invece si può creare un danno irreparabile. Infatti, la forzatura contraddice il modello non stazionario.

6) Interessanti fenomeni si scoprono attraverso il calcolo numerico, ma la loro interpretazione in termini del modello prescelto può essere affetta da pregiudizi. Si consideri, per esempio, il moto, uniforme all'infinito, intorno a un cerchio. Siano x ed y due assi ortogonali, passanti per il centro del cerchio, con l'asse x parallelo alla velocità all'infinito. A bassi numeri di Mach il moto non può che essere irrotazionale e quindi simmetrico sia rispetto all'asse x che all'asse y. Ogni scostamento da queste simmetrie o, peggio, la separazione del flusso a valle e la formazione di scie vorticose non è che la rivelazione dell'inadeguatezza della tecnica numerica. All'aumentare del numero di Mach all'infinito al di sopra di 0,405 circa, il moto diventa transonico; due urti si formano simmetricamente rispetto all'asse x. La rotazionalità della corrente dietro gli urti può creare due zone di separazione e ricircolazione.

La quantità di vorticità in esse intrappolata dipende dalla storia dell'evoluzione. Inoltre vi sono due soluzioni possibili: una stazionaria e simmetrica rispetto all'asse x, ma instabile, ed una stazionaria in cui la separazione (non viscosa) avviene in modo alternato e periodico nei semipiani superiore ed inferiore, con formazione di vortici che producono una scia di Karman con un numero di Strouhal appropriato. Il moto degli urti è stato elegantemente spiegato da Pandolfi in termini fisici e l'insieme dei fenomeni è un esempio di «ciclo limite» con chiare e semplici interpretazioni fisiche.

7) In altri casi, tuttavia, l'uso dell'espressione «ciclo limite» è un pregiudizio, non avendo alcuna interpretazione fisica nè nel modello prescelto nè in qualunque altro modello. Questo avviene, per esempio, quando si calcola un flusso contenente urti, siano essi espressi esplicitamente come discontinuità ovvero, come suol dirsi, «catturati». Nell'avvicinarsi a stati stazionari asintoticamente, gli urti possono vibrare in maniera impercettibile sullo schermo di un computer, ma tale da far oscillare il residuo fra valori di diverso ordine di grandezza, in modo perfettamente periodico e con una frequenza di pochi cicli iterativi. Il fenomeno è puramente numerico; nel caso di «shock-fitting» le sue cause e il rimedio sono facilmente individuati: piccole variazioni nella posizione dell'urto lo portano a dipendere da altri punti della griglia di base, e quindi a spostarsi in direzione opposta, ripetendo il ciclo. Nel caso di urti catturati, credo che la causa sia analoga. Il limitarsi a battezzare il fenomeno con un nome prestato non è buona scienza.

Si può, da questa breve analisi, limitata a un campo assai ristretto di una sola delle tante branche della scienza, ricavare qualche conclusione? A costo di essere tacciato di pregiudizio, mi permetto di pensare che gli esempi che ho portato non siano fatti isolati, da curarsi nell'ambito di una certa tecnologia, ma siano invece tipici esempi di un male diffuso. Se ciò è vero, la conclusione deve uscire dal campo ristretto della meccanica dei fluidi, press'a poco in questa forma:

I pregiudizi sono figli della superficialità, che è sempre associata con l'arroganza e la presunzione. La nostra epoca ne è particolarmente ricca, e tocca alla scuola rimettere in auge modestia, autocritica e disciplina.

Flussi ipersonici in non-equilibrio

Maurizio PANDOLFI*

Introduzione

La realtà fisica dei flussi in regime ipersonico è molto complessa. Qui di seguito ci si propone di esaminarne un aspetto: l'interazione fra fluidodinamica e fenomenologia di non-equilibrio.

Per poter mettere meglio in risalto tale interazione, si assume una modellizzazione alquanto cruda per la fluidodinamica. Il fuido è considerato compressibile e non stazionario. Inoltre, trascurando i fenomeni di trasporto, esso risulta pure non viscoso e non conducibile termicamente.

Dei tre fenomeni tipici di non-equilibrio, quello termodinamico, relativo alla energia di vibrazione, quello chimico e quello della ionizzazione, si considera solo il secondo. Per l'energia vibrazionale, si può ipotizzare il gas eccitato parzialmente o totalmente, oppure in equilibrio. Qui si è assunto il livello di eccitazione corrispondente ad un grado di libertà. In ogni caso, tale assunzione non è importante nel contesto che segue. La ionizzazione è del tutto trascurata. Tali due ipotesi concorrono alla semplificazione del modello e sono, peraltro, pienamente ragionevoli per un ampio campo di condizioni tipiche del rientro. Un modello di cinetica chimica descrive il relativo fenomeno di non-equilibrio.

In conclusione, la fuidodinamica risulta descritta dalle equazioni di Eulero ed il processo chimico di non-equilibrio da una cinetica, successivamente illustrata.

Qui di seguito vengono analizzati alcuni punti caratteristici della interazione fra fluidodinamica e chimica in non-equilibrio. In particolare, vengono considerate le equazioni che descrivono il fenomeno e la forma a cui esse tendono nelle condizioni limite, rappresentate rispettivamente dal flusso congelato e da quello in equilibrio. Viene quindi analizzata la propagazione ondosa nel fluido reagente, in non-equilibrio e nella configurazione di pieno equilibrio. Infine si ricorda come l'irre-

* Dip. di Ing. Aeronautica e Spaziale Politecnico di Torino, C.so Duca degli Abruzzi, 24, 10129 Torino, Italia.

versibilità propria della evoluzione in non-equilibrio comporti la formazione di vorticità nel seno della corrente.

Le considerazione che seguono, sviluppate sulla base dei suggerimenti forniti in bibliografia classica (per esempio [1], [2]), appaiono interessanti sia per l'indagine del fenomeno fisico che, in misura non trascurabile, per le indicazioni fornite nel condurre una analisi critica dei risultati forniti dalla indagine numerica.

Le equazioni

Si considera un fluido compressibile, non viscoso, non conducibile termicamente, in regime non stazionario e miscela di gas perfetti. Con le notazioni usuali, le risultati equazioni di Eulero (continuità, quantità di moto ed energia), scritte in forma quasi lineare, risultano:

$$\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho \nabla \cdot v = 0 \tag{1}$$

$$\frac{D\vec{v}}{DT} + \frac{1}{\varrho} \nabla p = 0 \tag{2}$$

$$\frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\varrho}\frac{Dp}{Dt} = 0\ . \tag{3}$$

La forma quasi lineare è conveniente poiché consente di mettere in risalto gli aspetti di propagazione ondosa che non sono direttamente evidenziati nelle leggi di conservazione, cui, peraltro, si fa ricorso nella applicazione numerica qualora si intenda catturare numericamente discontinuità fluidodinamiche.

Nel modello di cinetica chimica qui assunto, si considera la miscela di cinque specie (O, N, NO, O_2, N_2, indicate rispettivamente con $i=1$, 2, 3, 4, 5).

Si indica con Y_i la concentrazione in massa della specie i-esima, che concorre alla formazione della miscela, e con μ_i la sua massa molecolare.

L'equazione di stato per la miscela è data da:

$$\frac{p}{\varrho} = \mathcal{R} T \sum_i \frac{Y_i}{\mu_i} \tag{4}$$

L'entalpia che compare nella Eq. 3 è legata alla temperatura ed alla energia complessiva di formazione (h_{for}):

$$h = h_{for} + \sum_i c_{pi} Y_i T \tag{5}$$

ove:

$$h_{for} = \sum_i Y_i h_i^\circ$$

e:

$$c_{pi} = \frac{5}{2} \frac{\mathcal{R}}{\mu_i} \ (i = 1, 2); \qquad c_{pi} = \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\right) \frac{\mathcal{R}}{\mu_i} \ (i = 3, 4, 5)$$

La cinetica chimica è descritta dalle equazioni di produzione delle specie. Tali equazioni risultano:

$$\frac{DY_i}{Dt} = \omega_i \mu_i \ . \tag{6}$$

In esse, la velocità di produzione delle specie i-esima bilancia la variazione locale nel tempo e la convezione della concentrazione, essendosi trascurata la diffusione.

Tali velocità di produzione delle specie (ω_i espresse in $g - mole \cdot g^{-1} \cdot \cdot s^{-1}$) dipendono da proprietà termodinamiche locali (p. ϱ) e dalle concentrazioni (Y_i):

$$\omega_i = \omega_i(p, \varrho, Y_j) \ , \quad \forall j \tag{7}$$

In virtù della conservazione delle due specie atomiche (O, N), due delle Eqq. 6 sono superflue e di queste se ne possono considerare solamente le prime tre. Per una valutazione quantitativa delle velocità ω_i si rinvia il lettore a [3], ove sono riportate formule e costanti necessarie.

L'interazione fra fluidodinamica e chimica è essenzialmente contenuta nelle Eqq. 5 e 7. Nella prima le concentrazioni Y_i, derivate dalla cinetica chimica (Eqq. 6), definiscono il legame tra entalpia, pressione e densità, soprattutto attraverso l'effetto dei calori di formazione (h_i°). Nella seconda, la pressione e la densità (in particolare il loro rapporto, proporzionale alla temperatura) influenzano fortemente le velocità di reazione.

È utile rammentare due modelli alternativi di miscele reagenti, che si possono considerare come casi limite del flusso in non-equilibrio. Il primo è il modello di flusso *congelato*, per il quale alle equazioni di produzione delle specie (Eqq. 6) si sostituisce la condizione che le concentrazioni permangano invariate sulle linee di flusso e, per ingressi uniformi, in tutto il eampo. In tal caso la Eq. 5 risulta semplificata per la costanza di h_{for}. Il secondo è rappresentato dal modello del flusso *in equilibrio*, le cui condizioni sono qui di seguito indicate con asterisco (*). Le concentrazioni di equilibrio sono fornite da equazioni algebriche:

$$Y_i = Y_i^*(p, \varrho) \tag{8}$$

Anche in tal caso, nella Eq. 5 l'entalpia dipende solo da p e ϱ, esplicitamente dalla temperatura ed indirettamente attraverso le concentrazioni di equilibrio che concorrono alla determinazione di h_{for}.

È opportuno ricordare qui la definizione della velocità del suono, come la velocità di propagazione di un disturbo a gradino che mantiene inalterata la sua forma [1]. Per il flusso congelato, essa è data da:

$$a_f^2 = \frac{h_\varrho}{\frac{1}{\varrho} - h_p} \tag{9}$$

mentre per il flusso in equilibrio si ha:

$$a_{eq}^2 = \frac{h_\varrho + \Sigma_i h_{Y_i^*} Y_{i\varrho}^*}{\frac{1}{\varrho} - h_p - \Sigma_i h_{Y_i^*} Y_{ip}^*} \tag{10}$$

Nella prima definizione (Eq. 9), le concentrazioni non appaiono, poiché permangono inalterate attraverso il disturbo ($dp, d\varrho$). Nella seconda definizione (Eq. 10) appaiono le concentrazioni di equilibrio, attraverso le loro derivate $Y_{i,\varrho}^*$ o $Y_{i,p}^*$. Tali derivate esprimono le variazioni delle concentrazioni (dY_i^*) che si accompagnano alle variazioni dp e $d\varrho$ che caratterizzano il disturbo.

È conveniente eliminare la derivata sostanziale della densità dalla equazione di continuità (Eq. 1). Attraverso la definizione della entalpia (Eq. 5) e l'equazione dell'energia (Eq. 3), si ottiene:

$$\frac{D\varrho}{Dt} = \frac{1}{a_f^2} \frac{Dp}{Dt} + \psi$$

dove:

$$\psi = \frac{1}{h_\varrho} \sum_i h_{Y_i} \omega_i \mu_i \tag{11}$$

L'equazione di continuità (Eq. 1) diventa dunque:

$$\frac{Dp}{Dt} + \varrho a_f^2 \nabla \cdot \vec{v} = a_f^2 \psi \tag{12}$$

Si mette in evidenza che nella Eq. 12, equazione di continuità per flusso in non-equilibrio, compaiono due elementi importanti. Da un lato, la velocità del suono, definita come quella del flusso congelato (Eq. 9). Dall'altro, il fattore ψ, che contiene gli elementi più significativi della chimica, fra cui le costanti degli equilibri chimici, proprio quelle che determinano le relazioni delle Eqq. 8.

Infine è importante ricordare che l'equazione di continuità per il flusso congelato risulta essere:

$$\frac{Dp}{Dt} + \varrho a_f^2 \nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{13}$$

molto simile alla Eq. 12, dalla quale differisce solo per l'assenza del termine di sorgente legato a ψ. Al contrario, per il flusso in completo equilibrio, si ottiene:

$$\frac{Dp}{Dt} + \varrho a_{eq}^2 \nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{14}$$

Qui la differenza con il non-equilibrio (Eq. 12) è duplice: l'assenza del termine di sorgente (come già per la Eq. 13) e l'introduzione della velocità del suono in condizioni di equilibrio (Eq. 10) in luogo di quella definita per il flusso congelato.

Flusso in non-equilibrio, congelato ed in equilibrio

Un parametro che può definire il grado di non-equilibrio in un flusso di miscela reagente è il numero di Damköhler (*Da*). Esso è proporzionale al rapporto di una lunghezza l_∞, tipica della fluidodinamica, su di una lunghezza l_{ch}, lungo la quale si sviluppa il rilassamento chimico. Parimenti, *Da* è proporzionale al rapporto dei relativi tempi t_∞ e t_{ch}. È interessante osservare la natura del flusso in non-equilibrio a differenti valori di *Da*. In tali analisi è conveniente assumere valori di riferimento prefissati per le proprietà termodinamiche (p_∞, ϱ_∞) e per la velocità (u_∞). Per problemi di rientro, ciò significa assumere il numero di Mach di volo e l'altitudine. La variazione di *Da* risulta determinata da una lunghezza tipica del corpo (l_∞), ossia dalla sua scala fisica.

Si ipotizzino valori molto piccoli di l_∞ (per esempio veicoli di rientro di dimensione ridottissima), che portano a $Da \to 0$. I tempi di residenza del gas all'intorno del corpo sono così ridotti, rispetto ai tempi di rilassamento chimico, che non si formano apprezzabili concentrazioni di nuove specie chimiche. Il flusso congelato appare dunque il limite del flusso in non-equilibrio, per $Da \to 0$. Si noti che le velocità delle reazioni chimiche non sono nulle, anzi possono essere molto elevate.

Al contrario, si ipotizzino valori molto alti di l_∞, indicativi di veicoli molto grandi. Ora $Da \to \infty$. I suddetti tempi di residenza del gas diventano così alti, che c'è modo di sviluppare nella miscela tutte le reazioni chimiche sino alle condizioni di equilibrio in accordo con il campo fluidodinamico generato dalla presenza del corpo. Il flusso in equilibrio rappresenta ora il limite del flusso in non-equilibrio per $Da \to \infty$. Si osservi che, in questo caso, le velocità di reazione tendono ad annullarsi.

È interessante osservare come le equazioni del flusso in non-equilibrio si comportino in questi due casi limite. Si prenda in considerazione l'equazione più semplice, quella della produzione delle specie (Eqq. 6). La si analizzi nella scrittura originaria, scritta nel piano fisico, senza operare alcuna adimensionalizzazione, e poi nella forma più consona al calcolo numerico (che non può prevedere grandezze tendenti a zero o infinito), nella quale le grandezze, lunghezze e tempi in particolare, appaiono normalizzati e scalati con riferimento a l_∞. La Eq. 6, nella forma normalizzata, presenta nel termine di sorgente una velocità di reazione Ω_i, definita come segue:

$$\Omega_i = \frac{\omega_i \, l_\infty}{u_\infty}$$

Per $l_\infty \to 0$, il termine di sorgente ω_i tende ad un valore finito, e così la derivata sostanziale della concentrazione nel piano fisico. Ciò non è contraddittorio, poiché tale valore finito è il limite di variazioni delle concentrazioni tendenti a zero su spazi e/o tempi che tendono anch'essi a zero. Ossia, non si hanno apprezzabili risultati delle reazioni chimiche, non perché le velocità di reazione siano nulle, ma perché spazi e tempi a disposizione sono evanescenti. Dunque, la Eq. 6, scritta nel piano fisico, ben riflette l'interpretazione del flusso in non-equilibrio che tende alla configurazionc congelata per $Da \to 0$. Ovviamente alle stesse conclusioni conduce la stessa equazione scritta in forma normalizzata, quella che fornisce indicazioni sulla soluzione numerica. Tuttavia, si nota che qui il termine di sorgente $\Omega_i \to 0$ per $l_\infty \to 0$. Questo è in accordo con differenze di concentrazione nel campo che tendono a zero, essendo, per contro, finite le scale degli spazi e tempi, ora normalizzati con riferimento a l_∞. Dunque il processo di limite al flusso congelato non presenta problemi, sia per l'interpretazione fisica che per l'analisi numerica.

Per $l_\infty \to \infty$, il flusso in non-equilibrio appare tendere al flusso in equilibrio. Considerando la Eq. 6 sul piano fisico, poiché la velocità di reazione ω_i tende a zero, si ottiene che pure la derivata sostanziale tende a zero. Tuttavia ciò non avviene per la costanza delle concentrazioni; anzi, la configurazione di equilibrio cui si tende è caratterizzata dalle massime variazioni di queste. Essa tende a zero poiché tali variazioni finite si diluiscono su spazi e/o tempi che tendono a ∞. Passando ora alla forma normalizzata della Eq. 6, si osserva che il termine di sorgente Ω_i può tendere ad un valore finito, essendo ω_i moltiplicata per l_∞. Ora la derivata sostanziale sul piano di calcolo, che bilancia Ω_i, presenta valori finiti a numeratore (variazioni finite di concentrazione) e a denominatore (spazi e tempi normalizzati). Questo fatto è indicativo di problemi che possono insorgere nella previsione numerica. Difatti, la soluzione che deriva dalla integrazione della Eq. 6, scritta in forma normalizzata, è costruita sulla base dei valori locali di Ω_i. Questi sono ottenuti numericamente come prodotti di un valore piccolissimo (ω_i) per uno grandissimo (l_∞) e risultano non affidabili ad alti Da, essendo limitato il numero di cifre significative disponibile nella macchina calcolatrice. Praticamente, per Da troppo alti, il calcolo si arresta per problemi che seguono alla determinazione errata di Ω_i. Si noti che ciò avviene là dove la rigidezza del sistema fluidodinamica-chimica diventa critica e che il problema della valutazione incerta di Ω_i ne è una diretta conseguenza. È dunque possibile concepire il flusso congelato ed il flusso in equilibrio come configurazione limite del non-equilibrio, al variare di Da.

Tuttavia, mentre il limite al flusso congelato si presenta chiaro, non altrettanto si può dire del limite al flusso in equilibrio. Si osservino le Eqq. 12 e 13 scritte in forma normalizzata (in particolare rispetto alla lunghezza l_∞). Il termine di sorgente della Eq. 12, risulta ora definito come:

$$\Psi = \frac{\psi \, l_\infty}{u_\infty}$$

Le due equazioni tendono chiaramente a coincidere per $Da \to 0$, poiché $\Psi \to 0$ per $l_\infty \to 0$.

Al contrario, per $l_\infty \to \infty$, con Ψ tendente ad un valore finito, la Eq. 12 non appare esplicitamente tendere alla Eq. 14 per la presenza di due fattori: la velocità del suono, che moltiplica la divergenza della velocità, è quella congelata nella Eq. 12 e quella definita di equilibrio nella Eq. 14. Inoltre il termine di sorgente Ψ, finito nella Eq. 12 per $Da \to \infty$, non compare nella Eq. 14. Concludendo, si può dire che l'esistenza di almeno due fattori che differiscono nelle equazioni non esclude di poter sperare che, con indagine più approfondita, si possa riconoscere che i due si compensino e che le equazioni siano equivalenti.

Propagazione ondosa in flussi reagenti

Il problema emerso nel confronto fra le equazioni di continuità del flusso in non-equilibrio, a $Da \to \infty$, e di quello in equilibrio risulta ancor più evidente dalla scrittura, sempre in forma normalizzata, delle equazioni di compatibilità che descrivono la propagazione di segnali lungo linee caratteristiche.

Dalla forma quasi lineare delle equazioni per il flusso in non-equilibrio si ottiene:

$$\frac{\partial R_{1,3}}{\partial t} + (u \mp a_f) \frac{\partial R_{1,3}}{\partial x} = a_f^2 \, \Psi \tag{15}$$

ove:

$$dR_{1,3} = dp \mp \varrho a_f du \ . \tag{16}$$

Per contro, per il flusso in equilibrio, risulta:

$$(17) \qquad \frac{\partial R^*_{1,3}}{\partial t} + (u \mp a_{eq}) \frac{\partial R^*_{1,3}}{\partial x} = 0$$

ove:

$$(18) \qquad dR^*_{1,3} = dp \mp \varrho a_{eq} du \ .$$

La differenza fra le Eqq. 15 e 17, allorché $Da \to \infty$, e quindi Ψ tende ad un valore finito, sono evidenti. Le linee caratteristiche su cui propagano i segnali differiscono per la diversa velocità del suono. Per lo stesso motivo, i segnali stessi (Eqq. 16 e 18) risultano definiti in modo diverso. Infine, per il flusso in equilibrio si può parlare di invarianti di Riemann (almeno per flusso omoentropico), mentre nel caso del non-equilibrio il termine di sorgente non lo consente.

L'equivalenza della Eq. 15, a $Da \to \to \infty$, e della Eq. 17 può essere intuita osservando che le velocità di reazione, che compaiono nel termine di sorgente Ψ, contengono nella loro definizione le costanti di equilibrio che determinano le relative concentrazioni (Eq. 8). Dunque, i termini a_f e Ψ nella Eq. 15 potrebbero rendere questa espressione equivalente alla Eq. 17, ove compare la sola a_{eq}. L'intuizione viene confermata dalla trattazione condotta nell'ambito della approssimazione acustica e, per semplicità, di una sola reazione. Si indica qui di seguito con l'apice ($'$) la perturbazione rispetto a valori costanti di base. In questa approssimazione la velocità di produzione della specie risulta:

$$\frac{\partial Y'}{\partial t} = \frac{Y^{*\prime} - Y'}{\tau}$$

Tale velocità è proporzionale direttamente allo scostamento della concentrazione rispetto al valore di equilibrio ed inversamente ad un tempo di rilassamento tipico della reazione (τ). È conveniente introdurre l'operatore che indica la derivazione lungo le linee caratteristiche nel flusso congelato:

$$\frac{D^f}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \mp a_f \frac{\partial}{\partial x}$$

Definito il segnale in non-equilibrio:

$$dR'_{1,3} = dp' \mp \varrho a_f du' \quad (19)$$

l'equazione di compatibilità, corrispondente alla Eq. 15 risulta essere:

$$\frac{D^f R'_{1,3}}{Dt} \propto a_f^2 \frac{Y^{*\prime} - Y'}{\tau} \quad (20)$$

Derivando ambo i membri della Eq. 20 rispetto al tempo e ricordando le equazioni del moto, si riconosce come dal termine di sorgente viene ad emergere la descrizione della propagazione di segnali nel flusso in equilibrio:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{D^f R'_{1,3}}{Dt}\right) \propto l_\infty \frac{D^{eq} R^{*\prime}_{1,3}}{Dt} \quad (21)$$

ove:

$$\frac{D^{eq}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \mp a_{eq} \frac{\partial}{\partial x}$$

ed il segnale in non-equilibrio risulta definito da:

$$dR^{*\prime}_{1,3} = dp' \mp \varrho a_{eq} du' \quad (22)$$

Si nota come la Eq. 21 esprime la propagazione ondosa in un mezzo reagente in non-equilibrio e come il fattore di scala l_∞ modula l'influenza del contributo del flusso congelato e di quello in equilibrio. Per valori piccoli di l_∞, ossia per $Da \to 0$, la propagazione ondosa è descritta in termini del flusso congelato:

$$\frac{D^f R'_{1,3}}{Dt} = 0 \quad (23)$$

Al contrario, per valori elevati di l_∞ è il contributo del flusso in equilibrio ad emergere

$$\frac{D^{eq} R^{*\prime}_{1,3}}{Dt} = 0 \quad (24)$$

Dissipazione e non-equilibrio

La produzione di entropia nell'ambito delle equazioni di Eulero può aver luogo solo attraverso onde d'urto. Se queste ultime presentano intensità variabile nel campo di moto, i livelli di entropia, a valle delle stesse, risultano differenti su linee di flusso limitrofe. È noto che la generaziione di tale gradiente di entropia comporta la nascita di vorticità nella corrente.

Anche i processi di cinetica chimica in non-equilibrio portano alla produzione di entropia. In particolare, la variazione di entropia nella miscela reagente è data da:

$$\mathrm{T\,ds} = dh - \frac{1}{\varrho} dp + \sum_i \zeta_i \, dY_i$$

ove $\zeta_i(p, \varrho, Y_i)$ è legato ai potenziali chimici delle specie e alle concentrazioni.

Considerando le variazioni incontrate da un elemento di massa di miscela nella sua traettoria e rammentando l'equazione dell'energia (Eq. 3), si ottiene, nella scrittura normalizzata:

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} \sum_i \zeta_i \frac{DY_i}{Dt}$$

In condizioni di non-equilibrio, la produzione di entropia lungo il tragitto di un elemento di miscela è tanto maggiore quanto più forte è il disequilibrio locale e più intensa la generazione di specie. Tuttavia, tale produzione di entropia scende a zero nei due casi limite di $Da \to 0$ e $Da \to \infty$.

Nel primo caso è evanescente la generazione di specie ($DY_i/Dt \to 0$), pur essendo finito ζ_i. Nel secondo, la derivata sostanziale della concentrazione DY_i/Dt è finita, come già visto precedentemente. Ora però il termine ζ_i tende a zero, poiché $\zeta_i^*(p, \varrho, Y_i^*) = 0$. Dunque, per la dissipazione, il limite del non-equilibrio appare regolare sia verso la configurazione congelata che verso quella in equilibrio, essendo per entrambe nulla la produzione di entropia.

La generazione di vorticità collegata ai differenti livelli di entropia su linee di corrente limitrofe è una ulteriore interessante manifestazione della interazione fra fluidodinamica e non-equilibrio.

Un esempio semplice ma significativo

Fra i numerosi problemi fisici in cui viene messa in risalto l'interazione fra fluidodinamica e non-equilibrio chimico, se ne ritrova uno semplice per la sua definizione e molto esauriente per la fisica in esso descritta.

Si consideri una corrente ad alta velocità, decisamente supersonica, ed ad alto livello entalpico, in condizioni di equilibrio, quindi con rilevante dissociazione. Tale corrente lambisca una parete che presenta una brusca deviazione attraverso un angolo di parete convesso. Se ci si limita all'ambito delle sole equazioni di Eulero, gas perfetto nelle condizioni di monte, il fenomeno è semplice e chiaro. Esso è noto come l'espansione di Prandtl-Meyer. Il campo di moto è formato da due regioni uniformi a monte e a valle, separate da un ventaglio di espansione delimitato da due caratteristiche. La prima, confinante con il campo di monte, è determinata dalle sole condizioni del flusso a monte. La seconda delimita il ventaglio sì che la corrente in uscita dallo stesso sia parallela alla parete deflessa. Il campo di moto non è caratterizzato da alcuna lunghezza di riferimento e appare *self-similar*.

Tuttavia il processo chimico introduce una lunghezza di riferimento, collegata ad un tempo di rilassamento chimico ed annulla il carattere geometrico di *self-similarity*.

In particolare, le particelle che corrono molto vicine alla parete subiscono una espansione del tipo alla Prandtl-Meyer, sulla base delle peculiarità fisiche del gas di monte. Infatti, l'espansione avviene in spazi così ridotti da ritenere congelato il flusso in prossimità dello spigolo. Si noti come, a valle della espansione sullo spigolo, la temperatura sia discesa e le concentrazioni di monte (stato fortemente dissociato) si trovino in forte disequilibrio chimico. Inizia dunque un processo di riassociazione, dapprima molto lento e quindi sviluppato su notevoli distanze a valle dello spigolo, lungo la parete deflessa. La lentezza della riassociazione è conseguenza della bassa temperatura. Allorché la riassociazione inizia ad aver luogo in entità non trascurabile, la temperatura cresce ed aumenta la velocità del processo. Più innanzi essa svanisce verso una condizione di equilibrio caratterizzato da pressione p_1 e temperatura T_1.

Ben diversa è l'evoluzione per particelle che corrono distanti dalla parete. Qui il ventaglio di espansione è molto esteso sul piano fisico e le particelle subiscono una espansione diluita nello spazio e nel tempo, sì che le reazioni chimiche hanno modo di svilupparsi sino ad una configurazione molto prossima all'equilibrio locale. Ragionevolmente si può dire che l'evoluzione segue una sequenza di stati di equilibrio sino al termine del ventaglio, alla pressione p_2 e temperatura T_2. Si osservi che

mentre a parete l'evoluzione della temperatura è caratterizzata da una istantanea discesa allo spigolo e da un recupero, dapprima lentissimo, poi più veloce, poi ancora asintotico ai valori di equilibrio (p_1, T_1), ora invece, a grande distanza sopra lo spigolo, la temperatura di una particella, lungo la sua traettoria, discende monotonicamente sino alla condizione di equilibrio (p_2, T_2). Fra le due linee di flusso ora viste, scorrono particelle che seguono stati intermedi di non-equilibrio. Tale esempio mette bene in luce come, nello stesso problema, le equazioni del flusso reagente in non-equilibrio abbiano da descrivere situazioni estreme.

Precedentemente si è visto come la velocità del suono abbia una differente definizione nel flusso congelato ed in quello in equilibrio. Di ciò si trova riscontro nel presente esempio. Con riferimento al problema iperbolico del flusso stazionario bidimensionale supersonico, la prima caratteristica del ventaglio di espansione presenta un angolo con la corrente a monte determinato dal numero di Mach, rapporto della velocità del gas a monte alla velocità del suono. In prossimità dello spigolo, il campo è dominato dal flusso congelato, con velocità del suono pari a a_f. A forte distanza dallo spigolo, il flusso è praticamente in equilibrio e la velocità del suono è data da a_{eq}. Poiché $a_f > a_{eq}$, tale prima caratteristica vicino allo spigolo è meno inclinata di quella a forte distanza dallo stesso.

Infine è possibile osservare, in tale esempio, gli effetti dei diversi livelli di dissipazione (e quindi della relativa vorticità) dovuti al non-equilibrio. Le particelle che scorrono a ridosso della parete, subito dopo l'espansione attorno allo spigolo, si ritrovano in condizioni di forte disequilibrio. Conseguentemente sono soggette a dissipazione. Lontano dalla parete, il flusso è sempre più prossimo all'equilibrio e l'evoluzione tende alla reversibiità. A notevole distanza a valle dello spigolo, sulle due linee di flusso ora considerate, si stabilisce la stessa pressione ($p_1 = p_2$). Infatti il campo è isobaro poiché tutte le linee di corrente scorrono parallele alla parete piana. Al contrario, la temperatura di equilibrio a parete (T_1) è maggiore di quella a forte distanza dalla stessa parete (T_2), causa il processo dissipativo del non-equilibrio. In corrispondenza di tale profilo non uniforme di temperatura lungo la normale alla parete, si ritrova un profilo non uniforme della velocità, con valore minimo a parete. Da esso si riconosce subito la vorticità generata dal non-equilibrio.

Questo esempio si presta molto bene come base per esperimenti numerici, al fine di controllare quanto le suddette particolarità della interazione fluidodinamica e non-equilibrio siano riprodotte dai risultati numerici. Ciò costituisce l'oggetto della attuale ricerca dell'autore.

REFERENCES

[1] VINCENTI, W.G. and KRUGER, C.H., «Introduction to Physical Gas Dynamics», John Wiley & Sons, New York, 1965.

[2] CLARKE, J.F. and MCCHESNEY, M., «The Dynamics of Real Gas», Butterworths, London, 1964.

[3] PARK, C., «On Convergence of Computation of Chemically Reacting Flows», AIAA Paper-85-0247, Jan. 1985.

Stability of Marangoni and combined free convection in shallow cavities

Luigi G. NAPOLITANO and Antonio VIVIANI *

Abstract. *The paper deals with the linear and energy stability analysis of Marangoni, natural and combined free convection in rectangular cavities of small aspect ratio, open at the top and with differentially heated end walls. The class of flow considered is that of parallel flows, away from end walls, for arbitrary values of the Marangoni, Grashof and Prandtl numbers. Smith (1982) and Hart (1983) have studied the linear stability of Marangoni convection and natural convection, respectively. In this work we consider combined convection and give the critical Reynolds number (R_c) and the Reynolds number of asymptotic stability in the mean (R_E) for the dynamic Bond number ranging from zero (Marangoni convection) to infinite (natural convection), in a wide range of Prandtl numbers. The critical curves of the linear theory are given in the plane Reynolds-Prandtl, and the instability and stability domains are given in the plane (R_M, R_G) with R_M and R_G the conditional Reynolds numbers based on the Marangoni and buoyant speed, respectively. The limiting values, for $Pr \to \infty$, of R_C and R_E are also calculated, and asymptotic laws for high Prandtl numbers are proposed, in the whole range of definition of the dynamic Bond number.*

1. INTRODUCTION

Convection in the absence of imposed velocites and/or pressure gradients in fluid systems with interfaces can be classified (Napolitano 1982) as natural, Marangoni or combined free convection, according to whether the motion is caused by buoyant forces, Marangoni stresses (surface tension grandients) or both.

* Istituto «Umberto Nobile», Università di Napoli, P.le V. Tecchio 80, 80125 Napoli, Italia e MARS - Microgravity Advanced Research and Support Center, Via Diocleziano 328, 80125 Napoli, Italia.

The subject matter of this paper is free convection in a shallow rectangular cavity with differentially heated end walls and a free liquid surface.

The bottom boundary of the cavity is rigid and insulated. The top liquid-air surface is assumed to be flat and undeformable (this places constraints on the values of the contact angle and of the capillary number) and there is not dynamic and thermal coupling between the liquid and the surrounding air. The surface tension along the free surface is assumed to be a linear decreasing or increasing function of the temperature. In most papers dealing with surface tension effects, the surface tension is assumed to be a linearly decreasing function of the temperature. This behaviour is typical of a large class of fluids, but one may find systems like some alloys, molten salts or liquid crystals with a surface tension growing linearly with temperature (Guyon and Pantaloni 1980). This last behaviour has been accounted for in various papers, particularly in Papers on Marangoni instability of liquid layers heated from below (see Lebon 1988). However, from the theoretical point of view, it must be pointed out that, if the surface tension is assumed to depend only on the temperature, a model of surface tension linearly increasing with the temperature implies that the surface phase is thermodynamically unstable.

The imposed horizontal temperature gradient induces a circulating convection flow into the cavity. The motion is generated by density differences in the gravitational field and by surface tension gradients along the free surface. For small temperature differences between the side walls, the flow is laminar and steady, and for a sufficient small aspect ratio, and far away from the end walls it is parallel to the horizontal boundaries. In the case of Marangoni convection we have a parabolic velocity profile, whereas in the case of natural convection a cubic velocity profile; for combined free convection we have different profiles (linear combination of the previous ones) depending on the value of the dynamic Bond number. When the surface tension increases with the temperature, the resulting Marangoni convection is from cold to hot regions near the free surface, in opposition to the motion due to the gravity forces (we do not consider the case of a negative thermal expansion coefficient): in this case some particular profiles (e.g. zero velocity at the free surface) can form.

The evaluation, by means of the classical linear stability analysis, of the critical conditions for the onset of the instability in terms of the flow parameters, of the nature (steady or oscillatory in time) of the new state and of the type of the secondary flows (two-dimensional: transverse or longitudinal; tridimensional), as well as a stability analysis via the ener-

gy method are the object of this study. This latter method studies stability against disturbances of finite amplitude restricted only in certain smoothness requirements and in their behaviour in directions where the geometry of the flow goes to infinite (i.e. so that the energy integrals exist), and it gives a sufficient condition of stability, whereas the linear theory can give only a sufficient condition of instability. If R_L indicates the critical Reynolds number found by the linear theory and R_E the Reynolds number of asymptotic stability in the mean found by the energy theory, in the region of the parameter space where $R_E < Re < R_L$ instability (called subcritical instability) is not ruled out, but its existence must be an effect of finite amplitude. Sometimes the subcritical range is small, but in the most cases the energy stability boundary is conservatively low and the subcritical range very large. The limit cases are the Rayleigh-Bénard problem for which the linear and energy stability boundaries coincide (Joseph 1965), and the plane Couette and Hagen-Poiseuille flows for which the linear theory seems to predict stability ($R_L = \infty$) whereas the energy method give, respectively, $R_E = 41.3$ and $R_E = 81.49$ (Joseph 1966; Joseph and Carmi 1969). When the subcritical range is small, then one can have confidence that both the linear and energy theories have reasonably captured the essential physics of the onset. One of the objectives of the present study is to evaluate the above range and to get insight into the application of the energy method for the evaluation of sufficient condition of stability for the class of basic flows considered.

Instability due to gravity forces and surface tension gradients are widely studied in the literature only when the temperature gradient is vertical (the base flow is zero), see the monograph of Chandrasekar (1961), the excellent review paper paper of Normand, Pomeau and Velarde (1977) and for late developments the review paper of Lebon (1988), which account for recent papers where a negative Marangoni number (surface tension increasing with the temperature) has been considered. In this case of imposed vertical temperature gradient also stability analyses via the energy method are available, and we mention those of Davis (1969), Lebon and Perez-Garcia (1980), Lebon and Cloot (1982).

Instead, when the imposed temperature gradient is horizontal, i.e. the basic flow is not zero, there is a lak of theoretical works on stability.

The relevance of the problem herein considered arises from tasks such as the growing of semiconductor crystals (Hurle, Jakeman and Johnson 1974; Gill 1974), tracking the dispersion of pollutants in estuaries (Cormack, Stone and Leal 1975) or from meteorology (Hart 1983). Our particular interest comes from the growth of crystals from melt by the

horizontal zone-melting and horizontal normal-freeze techniques (Hurle and Jakeman 1981) both on earth and in microgravity environment. One of the problems associated with these techniques is the development of striations or segregations bands parallel to the melt-crystal interface. The cause of this is recognized to be a time-dependent crystal growth spccd duc to temperature oscillations in the melt, which in turn are generated by an instability of the basic flow field in the melt. Temperature oscillations have been observed experimentally by several authors in liquid of various Prandtl numbers, e.g., by Utech and Flaming (1967) and Stewart and Weinberg (1971) in molten alluminium ($Pr = 0.01$); by Hurle, Jakeman and Johnson (1974) in molten Gallium ($Pr = 0.02$), by Schwabe and Scharmann (1981) in a liquid of Sodium Nitrate ($Pr = 9.3$); by Kamotani, Ostrach and Lowry (1982) in a layer of fluorocarbon liquid ($Pr = 64$); by Legros, Limbourg-Fontaine and Petré (1986), during an experiment under low gravity, in an aqueous long chain alcohol solution ($Pr \cong 7$), which exhibit surface tension increasing with the temperature.

Theoretical works on the subject are those of Smith (1982), see also Smith and Davis (1983), Hart (1983), Napolitano and Viviani (1989), who performed linear stability studies.

Smith (1982) studies Marangoni convection (zero Bond number) and finds an oscillatory instability with respect to tridimensional disturbances for all the values of the Prandtl number.

Hart (1983) analyzes the case of natural convection (infinite Bond number); he finds an oscillatory instability but his analysis is limited to two-dimensional longitudinal disturbances and low Prandtl numbers.

Napolitano and Viviani (1989) study the instability of combined convection with respect to tridimensional non-stationary disturbances, and as a particular result they correct the critical curve reported by Hart (1983) and exend the study of Hart to high Prandtl numbers.

Here we give an energy stability analysis of the class of flows under consideration for the Bond number ranging from zero to infinity, which is also, at the best of our knowledge, the first energy stability study of convection in cavities with horizontal heating. To help intepreting and understanding the present results, we summarizc the results of the linear theory already presented by the authors.

Thus, after establishing the set of relevant equations and the base flow solutions (sections 2 and 3), we summarize the instability analysis via the normal modes technique and the relative results in sections 4 and 5. Then, in section 6 we study the sufficient conditions of stability by the energy method, and the results are presented in section 7. Final comments and conclusions are given in section 8

2. THE MODEL

Consider the cavity shown in Fig. 1, of length L, height H and small aspect ratio H/L, with the left wall at temperature T_C and the right wall at temperature $T_H = T_C + \Delta T$. The liquid filling the cavity is bounded from above by a liquid-gas interface, along which acts the surface tension σ. The gravity vector $\underline{g}$ acts parallel to the side walls and is directed downward.
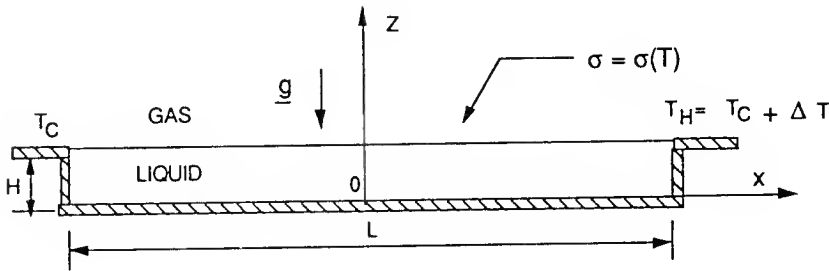
Fig. 1 - Geometry of the problem.

The state equations for the liquid density ϱ and the surface tension σ are assumed to be, respectively:

(1) $$\varrho = \varrho_r [1 - \beta_T (T - T_r)]$$

(2) $$\sigma = \sigma_r - \sigma_T (T - T_r)$$

where T_r is the reference temperature, ϱ_r and σ_r are density and surface tension for $T = T_r$; β_T is the coefficient of thermal expansion; σ_T is the negative rate of change of the surface tension with temperature ($\sigma_T = -d\sigma/dT$), that we assume to be a positive or negative constant. We shall not consider the case of a negative coefficient of thermal expansion, so that for $\sigma_T > 0$ the Marangoni convection is superimposed to the natural convection.

We assume that: the liquid is Newtonian, non-elatic, non micro-polar, homogeneous, with constant diffusion coefficients; the Boussinesq approximation applies; viscous dissipation and radiation effects are

negligible. With these assumptions the flow in the cavity is governed by the Boussinesq form of the continuity, Navier-Stokes and energy equations, that is non-dimensional form are:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \tag{3a}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla}\, \underline{v}\right) + \underline{\nabla} p = \nabla^2 \underline{v} + G T \underline{i}_z \tag{3b}$$

$$\mathrm{Pe}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla}\, T\right) = \nabla^2 T \tag{3c}$$

where $\underline{v}$, p, T denote non-dimensional velocity, pressure and temperature, $\underline{i}_z$ is the unit vector of the z-axis.

The non-dimensional form results from scaling the coordinates x, y, z by the height H of the cavity and the velocity $\underline{v}(u, v, w)$ by the reference velocity V_r to be defined below. The non-dimensional temperature is measured above the mean temperature of the side walls and has its scale $(\Delta T)_r = \Delta T\, H/L$. The scales for time and pressure, the latter measured above the hydrostatic pressure in the reference state at the temperature T_r, are H/V_r and $\mu V_r/H$, with μ the dynamic viscosity of the liquid.

The three parameters that appear in Eqs. (3) are the «conditional» Reynolds (Re), Peclet (Pe) and Grashof (G) numbers (defined in terms of a still undetermined reference velocity, Napolitano 1982:
$\mathrm{Re} = V_r H/\nu$, with ν the kinematic viscosity;
$\mathrm{Pe} = \mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}$ with $Pr = \mu/\alpha_T$ the Prandtl number in which α_T is the thermal diffusivity;
$G = (g\beta_T \Delta T H^2)/(\nu V_r)\, H/L$.

The Reynolds and Peclet numbers are «response» numbers and can be expressed as the ratio of the reference velocity to the diffusivity velocities: $\mathrm{Re} = V_r/V_\nu$ and $\mathrm{Pe} = V_r/V_\alpha$ with $V_\nu = \nu/H$ and $V_\alpha = \alpha_T/H$ the viscous and thermal diffusivity velocities.

The Grashof number is a «driving» number, defined as the ratio of the gravitational velocity to the reference velocity: $G = V_g/V_r$ with $V_g = (g\beta_T \Delta T H^2/\nu)\, H/L$.

For a systematic study of response, driving and conditional characteristic numbers, see Napolitano (1978, 1982).

The relevant boundary conditions at the free surface are deduced from the general balance equations for surface phases (Napolitano 1979),

under the following assumptions:

i) the surface phase is a stream-surface devoid of any thermodynamic property apart from the surface tension;

ii) the surface phase is in thermal and mechanieal equilibrium with the adjacent volume phases;

iii) momentum and energy coupling between the adjacent fluid phases, radiation effects and surface irreversibility are negligible;

iv) the capillary number V_r/V_c with $V_c = \sigma_r/\mu$ the capillary velocity, is much less than one so that the interface preserves its hydrostatic shape, that we assume to be planar (contact angle equal to $\pi/2$).

The boundary conditions at the interface then read:

(4a) $$w = 0 \qquad z = 1$$

(4b) $$\frac{\partial u}{\partial z} + M \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \qquad z = 1$$

(4c) $$\frac{\partial v}{\partial z} + M \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \qquad z = 1$$

(4d) $$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \qquad z = 1$$

where the parameter that appears in Eqs. (4b, c) is the conditional Marangoni number $M = V_m/V_r$, with $V_m = (\sigma_T \Delta T/\mu) H/L$ the Marangoni velocity and it is a driving number. The boundary conditions at the lower rigid wall are:

(5a, b, c) $$u = v = w = 0 \qquad z = 0$$

(5d) $$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \qquad z = 0$$

We do not consider boundary conditions at the side walls because the present analysis is devoted to the parallel core-flow solution.

The reference velocity V_r appropriate to the problem under study, according to Napolitano (1982), must be of the order of magnitude of the maximum characteristic driving velocity, i.e.

(6) $$V_r = O(\max[|V_m|, V_g])$$

where the absolute value is necessary for σ_T can be either positive or negative. We assume:

$$V_r = |V_m| + V_g \tag{7}$$

In this way we satisfy the criterion (6) in the complete range $0 \leqslant \mathrm{Bo} < \infty$, with $\mathrm{Bo} = V_g/|V_m|$ $[= g\Delta\varrho H^2/\Delta\sigma;\ \Delta\varrho = \varrho_r \beta_T \Delta T,\ \Delta\sigma = |\sigma_T| \Delta T]$ the dynamic Bond number, that measures the relative importance of the gravitational and surface tension effects.

Due to the choice (7), the Marangoni and Grashof numbers are at most unitary and not independent, verifying the relation:

$$|M| + G = 1 \tag{8}$$

By introducing the parameter

$$\lambda = \frac{M}{G} = \frac{V_m}{V_g} = 1/\mathrm{Bo} \tag{9}$$

M and G can be eliminated in terms of λ by means of (8) and (9), which give:

$$M = \frac{\lambda}{1+|\lambda|} \quad ; \quad G = \frac{1}{1+|\lambda|} \tag{10a,b}$$

The choice of λ as parameter of the problem, instead of the more useful Bond number $\mathrm{Bo} = 1/\lambda$, has been made in order to distinguish the two cases $G=0$ with $M=-1$ and $G=0$ with $M=1$.

The particular cases of natural and Marangoni convection are characterized by:

$$\lambda = 0 \quad (M=0;\ G=1) \tag{11a}$$

$$\lambda = +\infty \quad (M=+1,\ G=0) \quad \sigma_T > 0 \tag{11b}$$

$$\lambda = -\infty \quad (M=-1,\ G=0) \quad \sigma_T < 0 \tag{11c}$$

Marangoni and natural convection are superimposed in the range $0 < \lambda < \infty$ and in opposition in the range $-\infty < \lambda < 0$.

3. THE BASE FLOW

If the aspect ratio of the cavity is sufficiently small, then a simple exact parallel-flow solution will exist away from thin turning region near the end walls. The parallel flow has been considered in detail by Cormack, Stone and Leal (1975) in the case of natural convection, whereas Sen and Davis (1982) and Strani, Piva and Graziani (1983) studied Mararangoni convection.

The solution for combined convection is:

$$\bar{u} = a\left[-\frac{M}{4}(3z^2-2z)+\frac{G}{48}(8z^3-15z^2+6z)\right] \tag{12a}$$

$$\bar{T} = ax + a^2\mathrm{Pe}\left[-\frac{M}{48}(3z^4-4z^3)+ + \frac{G}{48}\left(2\frac{z^5}{5}-5\frac{z^4}{4}+z^3\right)\right]+b \tag{12b}$$

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} = a\left[-\frac{3}{2}M+G\left(\frac{5}{8}\right)\right] \tag{12c}$$

The parallel flow arises in response to the horizontal temperature gradient, the lateral walls induce a pressure gradient that sustains the return flow; convection of internal energy by this end-to-end counterflow is then balanced by vertical diffusion.

The solution (12) has been derived from the application of the singular perturbations method, when the field variables are expanded in an asymptotic series in terms of the small parameter H/L. The constants (a) and (b) must be determined by matching the solution with the flow near the lateral walls. Because only the gradient of $\bar{T}$ appears in the stability problem, the constant (b) is inessential; the constant (a) is at a first approximation unitary, and we shall assume just $a=1$: this is equivalent to take the leading term of the asymptotic expansion. With these approximations, the base flow for the stability analysis, expressed in terms of the parameter λ instead of M and G, is:

$$\bar{u} = \frac{1}{1+|\lambda|}\left[-\lambda\left(\frac{3}{4}z^2-\frac{1}{2}z\right)+\frac{z^3}{6}-\frac{5}{16}z^2+\frac{z}{8}\right] \tag{13a}$$

(13b) $$\bar{T} = x + \frac{\mathrm{Pe}}{1+|\lambda|}\left[-\lambda\left(\frac{z^4}{16} - \frac{z^3}{12}\right) + \frac{z^5}{120} - \frac{5}{192}z^4 + \frac{z^3}{48}\right]$$

(13c) $$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{1}{1+|\lambda|}\left(-\frac{3}{2}\lambda + z - \frac{5}{8}\right)$$

We point out that (13) is an exact solution of the problem (3), (4), (5) if one assumes a linear temperature distribution on the bottom wall of the cavity (Napolitano and Viviani 1990). In this case, the higher approximations of the asymptotic expansion are identically zero, and the lateral walls effect is felt in the core region only through the generation of a pressure gradient in the x-direction, that maintains zero max flux through any vertical plane.

The base flow velocity profiles $\bar{u}(z)$ for $\lambda = 0$ ($G = 1$; $M = 0$); $\lambda = +\infty$ ($M = 1$; $G = 0$); $\lambda = -\infty$ ($M = -1$; $G = 0$) are reported in Fig. 2a. In Fig. 2b the corresponding temperature profiles $(\bar{T} - x)/\mathrm{Pe}$ are shown. The turning points of the temperature profiles coincide with the points of zero velocity.

In Fig. 3a the velocity profiles are shown for different values of λ and the corresponding temperature profiles are reported in Fig. 3b; for $\lambda < 0$ we can see two counter rotating cells.
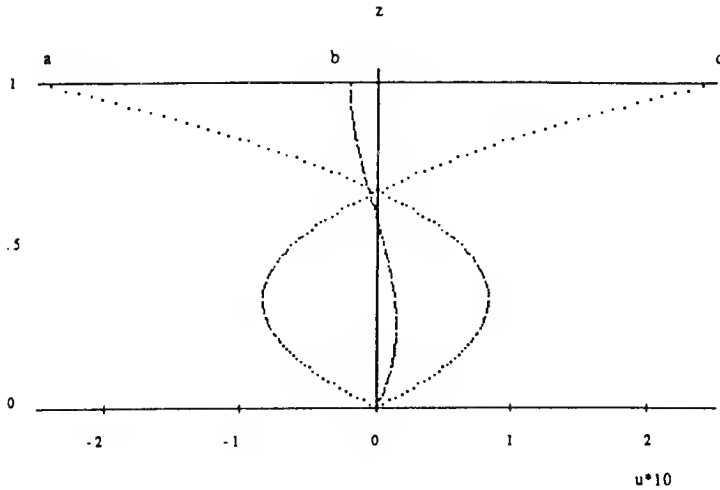
Fig. 2a - Velocity profiles for Marangoni convection, (a): $M = 1$ and $\lambda = +\infty$; (c): $M = -1$ and $\lambda = -\infty$; and for natural convection, (b): $G = 1$ and $\lambda = 0$.
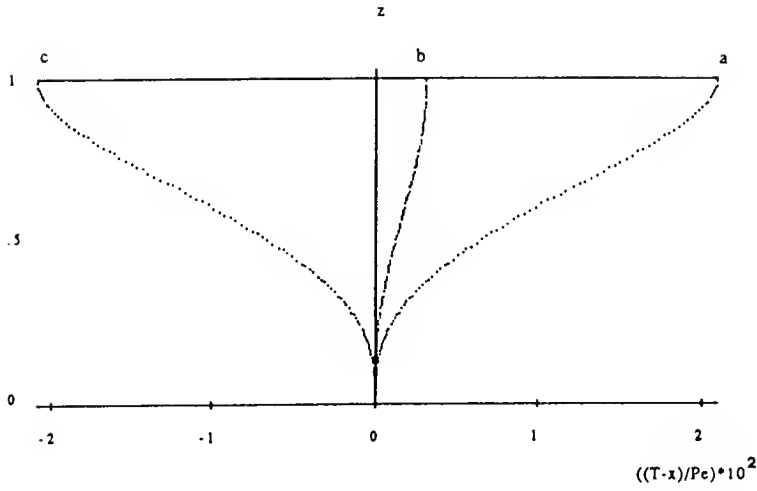
Fig. 2b - Temperature difference profiles between free surface and bottom wall corresponding to the velocity profiles of Fig. 2a.
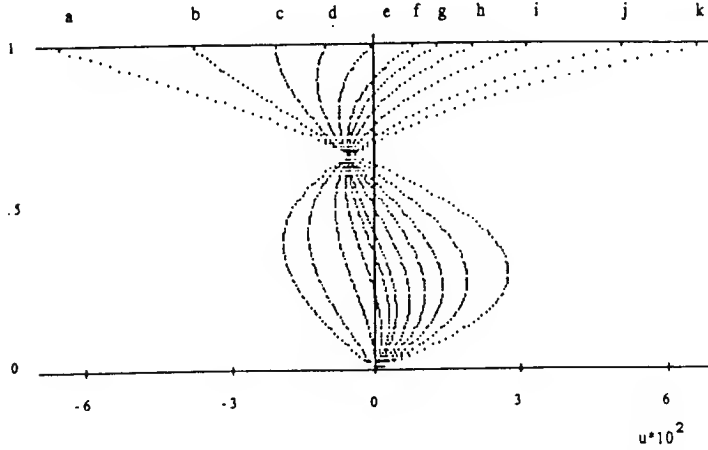
Fig. 3a - Velocity profiles for different values of the parameter λ:
(a: $\lambda=0.25$); (b: $\lambda=1/12$); (c: $\lambda=0$); (d: $\lambda=-1/24$) (e: $\lambda=-1/12$); (f: $\lambda=-0.125$); (g: $\lambda=-0.15$); (h: $\lambda=-0.1875$); (i: $\lambda=-0.25$); (j: $\lambda=-0.375$); (k: $\lambda=-0.5$).
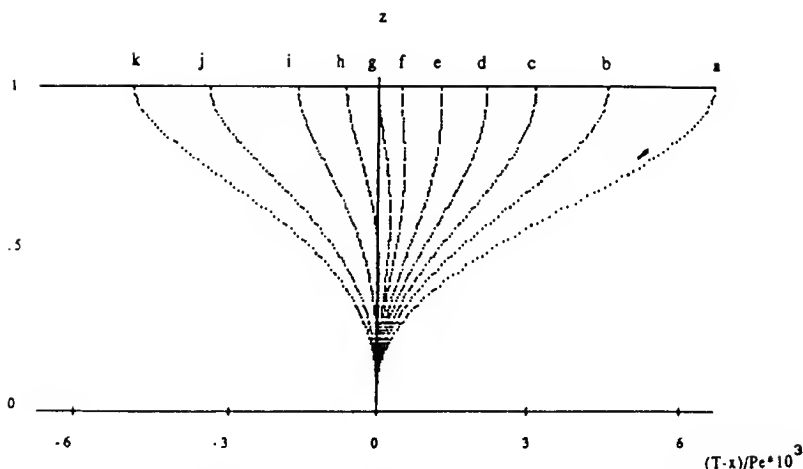
Fig. 3b - Temperature difference profiles between free surface and bottom wall corresponding to the velocity profiles of Fig. 3a.

In Fig. 4a and 4b we illustrated three particular profiles, corresponding to the values $\lambda = -1/12$, $\lambda = -0.15$, $\lambda = -0.25$ [profiles (a), (b) and (c), respectively]. For $\lambda = -1/12$ the surface velocity is zero and the corresponding profile is symmetrical with respect to $z = 1/2$. For $\lambda = -0.15$ the surface temperature is the same of that of the lower rigid surface and both are less than the temperature in the liquid. For values of λ of about -0.15 there are regions with positive and other ones with negative stratification: this can strongly influence the stability. For $\lambda = -0.25$, the lower cell due to the gravity disappears; this case is characterized by $d\bar{u}/dz = 0$ for $z = 0$.
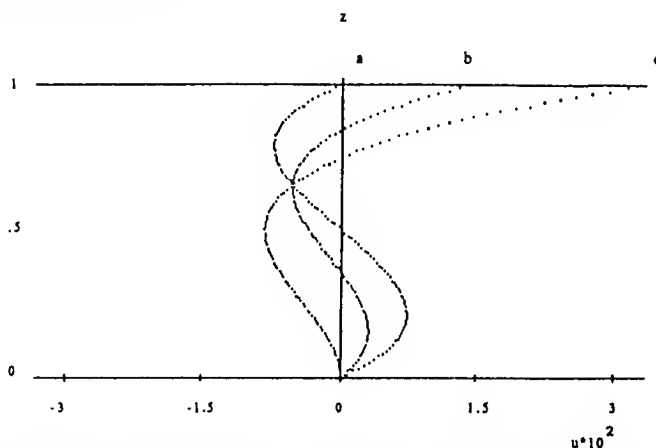
Fig. 4a - Velocity profiles for $\lambda = -1/12$ (a); $\lambda = -0.15$ (b); $\lambda = -0.25$ (c).
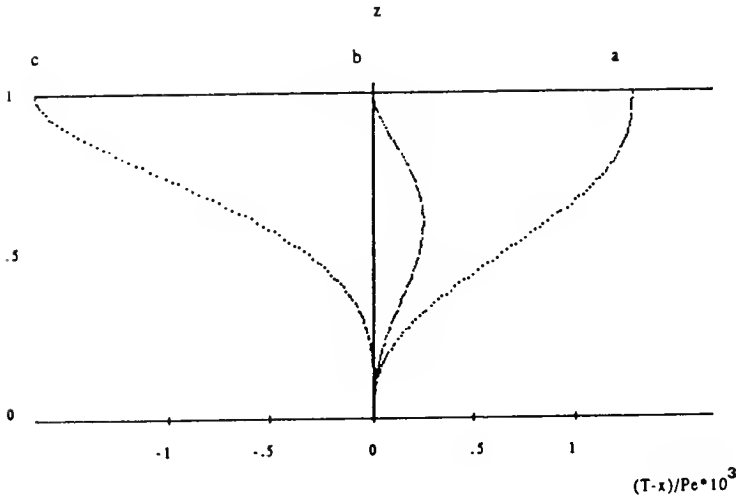
Fig. 4b - Temperature difference profiles between free surface and bottom wall for $\lambda = -1/12$ (a); $\lambda = -0.15$ (b); $\lambda = -0.25$ (c).

4. LINEAR STABILITY ANALYSIS

To investigate for what values of the parameters Re, Pr, M, G (or Re, Pr, λ) the solutions (13) are stable, small disturbances are introduced into the flow. The equations for the evolution of the disturbances are obtained by writing each flow variable as a sum of a base flow quantity and a corresponding small disturbance:

$$(14) \qquad (u, v, w, p, T) = (\bar{u}, 0, 0, \bar{p}, \bar{T}) + (u', v', w', p', T');$$

where the overbar denotes the base flow and the apex the disturbances. The equations governing the initial growth or decay of the disturbance are obtained by introducing (14) in the Boussinesq system (3) and boundary conditions (4), (5), and dropping terms of second order in small quantity. the diturbances may be expanded in the form of normal modes:

$$(15) \qquad (u', v', w', p', T') = (\hat{u}(z), \hat{v}(z), \hat{w}(z), \hat{p}(z), \hat{\vartheta}(z))e^{i(\alpha x + \beta y) + \gamma t}$$

and the amplitude functions $(\hat{u}(z), \hat{v}(z), \hat{w}(z), \hat{p}(z), \hat{\vartheta}(z))$ are then governed by equations which take the form, by eliminating the symbol $\wedge$ in order to simplify the notation:

(16a) $(L - i\alpha \mathrm{Re}\,\bar{u} - \gamma\,\mathrm{Re})\,u(z) = i\alpha p + \mathrm{Re}\,w D\bar{u}$

(16b) $(L - i\alpha \mathrm{Re}\,\bar{u} - \gamma\,\mathrm{Re})\,v(z) = i\beta p$

(16c) $(L - i\alpha \mathrm{Re}\,\bar{u} - \gamma\,\mathrm{Re})\,w(z) = Dp - G\vartheta$

(16d) $(L - i\alpha \mathrm{Pe}\,\bar{u} - \gamma\,\mathrm{Pe})\,\vartheta(z) = \mathrm{Pe}(u\bar{T}_x + wD\bar{T})$

(16e) $Dw + i\alpha u + i\beta v = 0$

(16f) $u = v = w = D\vartheta = 0 \qquad z = 0$

(16g) $w = Du + Mi\alpha\vartheta = Dv + Mi\beta\vartheta = D\vartheta = 0 \qquad z = 1$

where $L = D^2 - k^2$; $D = \dfrac{d}{dz}$; $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

$\bar{T}_x$ is the x-derivative of the base-flow temperature field; in the present study this derivative is equal to one but, for clearness sake, we retain it in the equations.

The parameters α and β are real numbers in the x and y directions and $\gamma = \gamma_r + \mathbf{i}\,\gamma_i$ is the complex frequency of the disturbance, the real part of which is an amplification rate and the imaginary part an oscillation frequency. The problem (16) is a dispersion relation between α, β and γ, with Re, Pr, M, G as parameters; for fixed (α, β) the problem is an eigenvalue differential problem for γ. According to the linear theory, the flow is stable if, for given Re, Pr, M, G, the non-dimensional amplification rate γ_r is negative for all values of α and β. Conversely, the flow is unstable if γ_r is positive for some values of α and β.

The states for which $\gamma_r = 0$ are called states of neutral stability and are characterized by

(17) $\gamma_r(\alpha, \beta, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \lambda) = 0$

If at the neutral state is $\gamma_i = 0$ the instability arises with respect to stationary disturbances and the neutral state is called stationary; if results $\gamma_i \neq 0$ we say that the neutral state is oscillatory.

Eq. (17) defines the neutral stability Reynolds number

(18) $R_N = R_N(\alpha, \beta, \mathrm{Pr}, \lambda)$

Lastly, that neutral state for which the neutral Reynolds number has a

minimum as a function of α and β is called critical state, and the corresponding Reynolds value is the critical Reynolds number:

(19) $$R_C = \min_{\alpha,\beta} R_N(\alpha, \beta, \mathrm{Pr}, \lambda)$$

4.1. Transverse and Longitudinal Modes

The system (16) simplies for strictly two-dimensional transverse ($\beta = 0$) and longitudinal ($\alpha = 0$) modes, the former being independent of the y coordinate, the latter independent of x.

For transverse modes the v-equation decouples from the set (16); its solution shows the v-component of the velocity to decay independently. The longitudinal modes depend only on y and z, but because of the base flow in the x-direction, the u-component of the disturbance velocity is not zero and the motion is tridimensional.

In stability analyses attention is often limited to transverse and longitudinal modes, and one does not consider stability with respect to tridimensional disturbances, as it is necessary when the Squire theorem is not valid, as in the present case. The above limitation can lead to erroneous results, as our analysis has clearly shown. We shall underline this point in the discussion of the results.

4.2 The Solution Method

We solved the eigenvalue problem posed in equations (16) by the Galerkin method after eliminating the pressure and the v-component of the velocity by using the continuity equation. The system results:

(20a) $$[L^2 - i\alpha \mathrm{Re}(\bar{u}L - D^2\bar{u}) - \gamma \mathrm{Re} L]\, w = k^2 G \vartheta$$

(20b) $$[L - i\alpha \mathrm{Re}\bar{u} - \gamma \mathrm{Re}]\left(u - \frac{i\alpha}{k^2} Dw\right) = \frac{\beta^2}{k^2} \mathrm{Re} D\bar{u}\, w$$

(20c) $$[L - i\alpha \mathrm{Pe}\bar{u} - \gamma \mathrm{Pe}]\, \vartheta = \mathrm{Pe}(u \bar{T}_x + w D\bar{T})$$

(20d) $$u = w = Dw = D\vartheta = 0 \qquad z = 0$$

(20e) $$w = D^2 w + Mk^2\vartheta = Du + Mi\alpha\vartheta = D\vartheta = 0 \qquad z = 1$$

The variables w, u, ϑ, are expanded as

(21a) $w = a_i w_i(z)$ $i = 1, \ldots, N$

(21b) $u = b_i u_i(z)$ $i = 1, \ldots, N$

(21c) $\vartheta = c_i \vartheta_i(z)$ $i = 1, \ldots, N$

where the constant coefficients a_i, b_i, c_i, in general complex, are unknown quantities, while the w_i, u_i, ϑ_i are a-priori given function; in (21) the summation Einstein convention is utilized.

We assumed for w_i, u_i, ϑ_i the expressions:

(22a) $w_i = z^2(z-1)\, C^{\bullet}_{i-1}(z)$

(22b) $u_i = z\, C^{\bullet}_{i-1}(z)$

(22c) $\vartheta_i = C^{\bullet}_{i-1}(z)$

where $C^{\bullet}_i$ is the i-th modified Chebychev polynomial of first kind defined in the range $0 \leqslant z \leqslant 1$.

The constants a_i, b_i, c_i are determined by inserting the (21) in the equations (20) and then taking the inner product with each trial function over the range $0 \leqslant z \leqslant 1$; use of integration by part allows to account for the natural conditions that are not satisfied by the single trial functions.

The result is a generalized complex algebraic eigenvalue problem:

(23) $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \gamma \underline{\underline{B}}\,\underline{x} = 0$

where $\underline{x}^T = (a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N, c_1, \ldots, c_N) = (\underline{a}^T, \underline{b}^T, \underline{c}^T)$ is the transposed of the column vector $\underline{x}$ of the Galerkin coefficient $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$. The matrices $\underline{\underline{A}}$ and $\underline{\underline{B}}$ (Viviani 1988), are of dimension $3N \times 3N$, and they are real in the case of longitudinal disturbances ($\alpha = 0$); for $\beta = 0$ the problem can be reduced to dimension $2N \times 2N$ (see Appendix I).

The eigenvalue problem (23) has been solved by using the EIGZC subroutine from the IMSL library (Cowell 1984).

For fixed Pr and λ, the neutral state (R_N) is calculated for each α and β by using the secant iteration method to meet the condition $\gamma_r = 0$, where γ_r is the real part of the principal eigenvalue, i.e. the eigenvalue with the greatest real part; then a minimization on α and β determines the critical state (R_c).

5. RESULTS OF THE LINEAR STABILITY ANALYSIS

The linear stability boundary has been defined calculating the critical Reynolds number $R_c = R_c(\mathrm{Pr}, \lambda)$, for values of the parameter λ varying in the whole of its range of definition $(-\infty, +\infty)$ and then covering all the cases of free convection (Marangoni, natural, combined).

For the Prandtl number, we analyzed the range $(10^{-4}, 10^3)$, thus covering both the cases of liquid metals $[\mathrm{Pr} \ll 1]$ and of silicon oils $[\mathrm{Pr} \geqslant O(1)]$, often used in experiments performed in microgravity conditions, as well as the limit cases $\mathrm{Pr} \to 0$ and $\mathrm{Pr} \to \infty$.
In all the cases analyzed, the instability occurs always with respect to oscillatory disturbances.

5.1 Marangoni Convection ($\lambda = \pm\infty$)

Fig. 5 shows the critical Reynolds number versus Prandtl, for the case of Marangoni Convection ($\lambda = \pm\infty$). The instability occurs with respect to tridimensional disturbances, for any value of the Prandtl number. The critical curves for the two cases $\lambda = \pm\infty$ coincide. The two cases
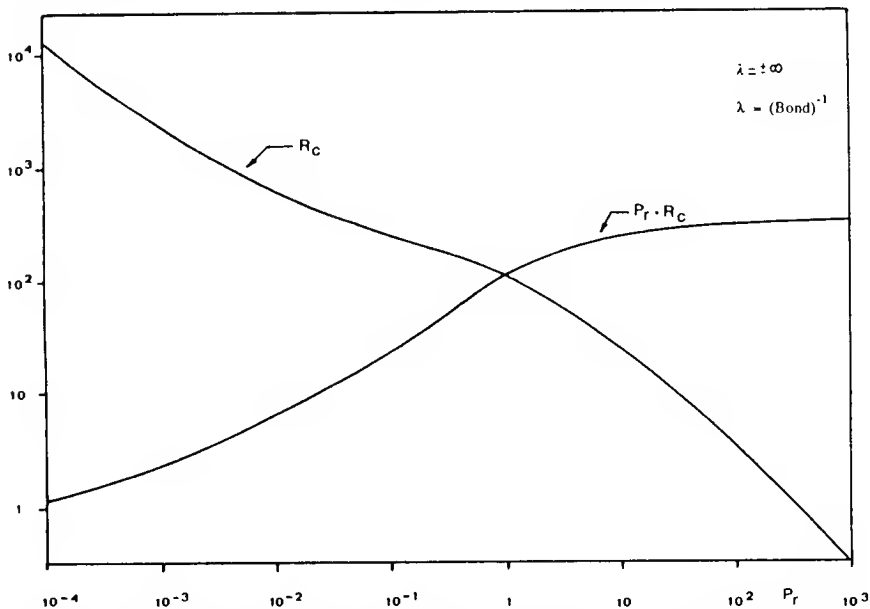
Fig. 5 - Critical Reynolds number (R_c) and product $\mathrm{Pr} \cdot R_c$ versus the Prandtl number (Pr) for Marangoni convection ($\lambda = \pm\infty$).

$\lambda = \pm\infty$ correspond to an inversion of velocity and vertical temperature fields (see Fig. 2), but for $\lambda = -\infty$ (surface tension increasing with the temperature) the flow is in direction of the horizontal thermal gradient and for $\lambda = +\infty$ it is in opposite direction. Nevertheless one must take into account that the Marangoni stress of the perturbation field is also inverted, so that the physical effect that gives rise to the onset of instability is unchanged. From a mathematical point of view this result follow from the property of invariance of the system (20) under the following transformation:

$$(M, u, w, \vartheta, \alpha, \bar{u}, D\bar{T}) \rightarrow (-M, -u, w, -\vartheta, -\alpha, -\bar{u}, -D\bar{T}) \tag{24}$$

The case $\lambda = +\infty$ ($M = +1$) has been analysed by Smith (1982), who solved the eigenvalue problem by using a method of direct integration of the equations (this method does not guarantee the convergence to the principal eigenvalue and a numerical investigation of the spectrum must be performed, see Lee and Reynolds 1967). Next table shows that the critical Reynolds number, for different values of Prandtl, obtained with the two different methods, are in excellent accordance.

Pr	R_c	
	Present study	Smith (1982)
0.1	223.653	223.667
1	116.028	116.022
5	452.801	452.794

We have also evaluated the critical value R_c for Pr $= 0$, by assuming that R_c remains finite for Pr $\rightarrow 0$. Then, the value $R_c = R_c(\text{Pr} = 0, \lambda = \pm\infty)$ can be calculated by setting Pe $= 0$ in the system (20), and the corresponding matrices $\underline{\underline{A}}$ and $\underline{\underline{B}}$ of the eigenvalue problem (23) are given in Appendix I. The computed value is $R_c = 28208$. We consider now the limit Pr $\rightarrow \infty$. As Fig. 5 shows, for Pr $\rightarrow \infty$ Pr$R_c \rightarrow B$ (constant) and then $R_c \rightarrow 0$ as B/Pr.

The asymptotic form of the system (20) for Pr $\rightarrow \infty$, is obtained by setting Pr Re $=$ B and Re $= 0$. The equations (20a-c) become

$$L^2 w = k^2 G \vartheta \tag{25a}$$

$$L\left(u - \frac{i\alpha}{k^2} Dw\right) = 0 \tag{25b}$$

$$(L - i\alpha B\bar{u} - \gamma B)\,\vartheta = B(u\bar{T}_x + wD\bar{T}) \tag{25c}$$

and the corresponding algebraic problem can be formally expressed as:

(26) $$\underline{\underline{U}}\,\underline{c} = \gamma B \underline{\underline{V}} c$$

where $\underline{c}^T = (c_1, \dots c_N)$ are the Galerkin coefficients for the temperature ϑ.

The expression for $\underline{\underline{U}}$ is given by

(27) $$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{L}} - B\underline{\underline{G}}\,\underline{\underline{C}}^{-1}\underline{\underline{D}} - i\alpha B(\underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{F}}^{-1}\underline{\underline{N}}\,\underline{\underline{C}}^{-1}\underline{\underline{D}})$$

The different matrices that appear in (27) and the matrix $\underline{\underline{V}}$ in (26) are defined as submatrices of the matrice $\underline{\underline{A}}$ and $\underline{\underline{B}}$ of the full problem (23) (see Appendix I).

The asymptotic value for $B = \mathrm{Pr}\, R_c$, calculated using the (26) is equal to 397.8, whereas for $\mathrm{Pr} = 10^3$ the product $\mathrm{Pr}\, R_c$ is 395.3. The asymptotic behaviour of R_c for $\mathrm{Pr} \to \infty$ is then $R_c \to 397.8/\mathrm{Pr}$.

5.2 Natural Convection ($\lambda = 0$)

The case of natural convection has been studied by Hart (1983) who considered only longitudinal disturbances. A comparison between the results of the present study and those obtained by Hart is shown in Fig. 6, where the critical Reynolds number versus Prandtl is reported. The solid
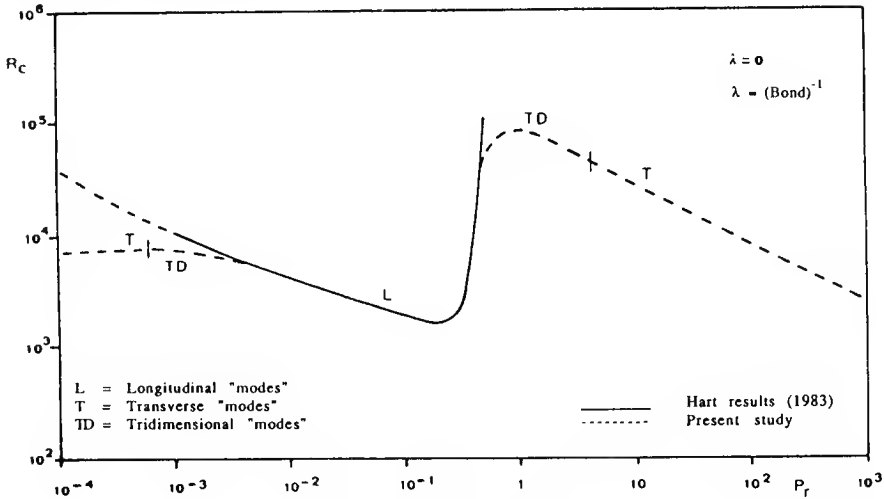
Fig. 6 - Critical Reynolds number (R_c) versus the Prandtl number (Pr) for natural convection ($\lambda = 0$).

line corresponds to Hart results, found here as particular case of the analysis performed with respect to tridimensional disturbances. For very low values of the Prandtl number ($\mathrm{Pr} < 10^{-3}$) the less stable «modes» are transverse (see Fig. 6). Increasing the Prandtl number the transition towards longitudinal modes occurs by means of tridimensional disturbances. For a Prandtl number close to 0.5 the longitudinal disturbances become very stable, so that the analysis performed by Hart does not provide for cases over this value. In fact, close to the value of $\mathrm{Pr} = 0.5$ tridimensional modes again rise, joining the curve of Hart with that of the transverse modes, typical of the instability for high values of the Prandtl number. An analysis of the various contributes to the disturbance energy (Viviani 1988) and of their dependence on the Prandtl number for transverse, longitudinal and tridimensional disturbances, should be useful to explain the type of disturbance with respect to which instability sets in.

Then, not only did we correct the stability curve of Hart, but also we pointed out that an analysis with respect to tridimensional disturbances is essential if one is interested in the correct definition of the stability boundary. An instability with respect to two-dimensional disturbances must rise from the general analysis, not characterizing a-priori the kind of the disturbance, but investigating the wave number value at the critical point. For instance, for the case, previously discussed, of Marangoni convection, since we found that the instability always occurs with respect to tridimensional disturbances, the assumption of two-dimensional disturbance should give rise to an over-estimation of the critical Reynolds number, for any value of the Prandtl number. As Fig. 6 shows, R_c approaches its limit value, for $\mathrm{Pr} \to 0$, much more quickly than in the case of Marangoni convection. The calculated value of R_c, for $\mathrm{Pr} = 0$ is equal to 7690.

For $\mathrm{Pr} \to \infty$, $R_c \to 0$. However the behaviour is different from the case, previously discussed, of Marangoni convection. The numerical results show that in this case R_c decreases as $\mathrm{Pr}^{-1/2}$. Therefore, in this case of natural convection, the proper limit for $\mathrm{Pr} \to \infty$ is $\mathrm{Pr}^{1/2} R_c \to \mathrm{const.}$

The expression (25) for the eigenvalue problem, for $\mathrm{Pr} \to \infty$, is not more valid, because $\mathrm{Pr}\, R_c \to \infty$. The law of variation of $R_c \to 0$ as $\mathrm{Pr}^{1/2}$, for $\mathrm{Pr} \to \infty$ has been also found by Gill and Davey (1969) who studied instability of natural convection along a vertical plate.

5.3 Combined Convection (λ finite, different from zero)

Fig. 7 shows the critical curves for three different values of the parameter $\lambda > 0$. As λ decreases the critical curves take the shape peculiar to the case of natural convection ($\lambda = 0$) (Fig. 6). However, we do not see yet the appearance of transverse disturbances for very low Prandtl numbers. They become less stable than the longitudinal disturbances for lower values of the parameter λ. This appears clearly in Fig. 8, where the critical curve for $\lambda = -0.04$ and the stability boundary with respect to longitudinal modes are shown. From this figure we can note as the instability to longitudinal disturbances, typical of $\lambda = 0$ for $Pr < 1$ (Fig. 6), is replaced by an instability to tridimensional disturbances. Figg. 9 and 10 show the evolution of the stability boundary towards the typical case of Marangoni convection.

The values R_c ($Pr = 0$, λ) are reported in Table 1.

Consider now the behaviour of the critical Reynolds number for $Pr \to \infty$. As in the cases of Marangoni and natural convection, for any value of λ, for $Pr \to \infty$ $R_c \to 0$. Except for the case $\lambda = 0$, where we found that $R_c \to 0$ as $Pr^{-1/2}$, in all the other cases investigated $[|\lambda| \in \in (10^{-2}, \infty)]$, for $Pr \to \infty$, $R_c \to B(\lambda)$. This behaviour is evident from the
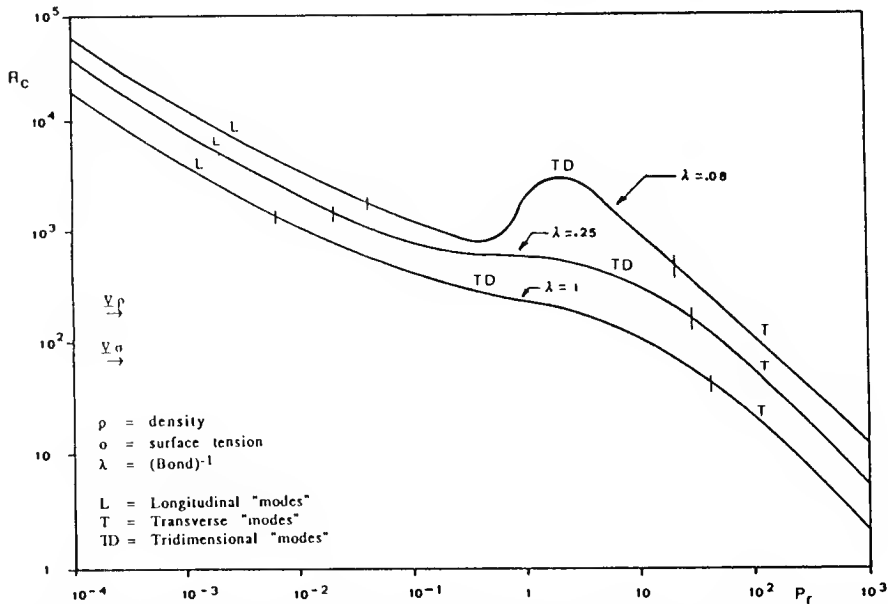
Fig. 7 - Critical Reynolds number (R_c) versus the Prandtl number (Pr) for combined convection with $\lambda > 0$.
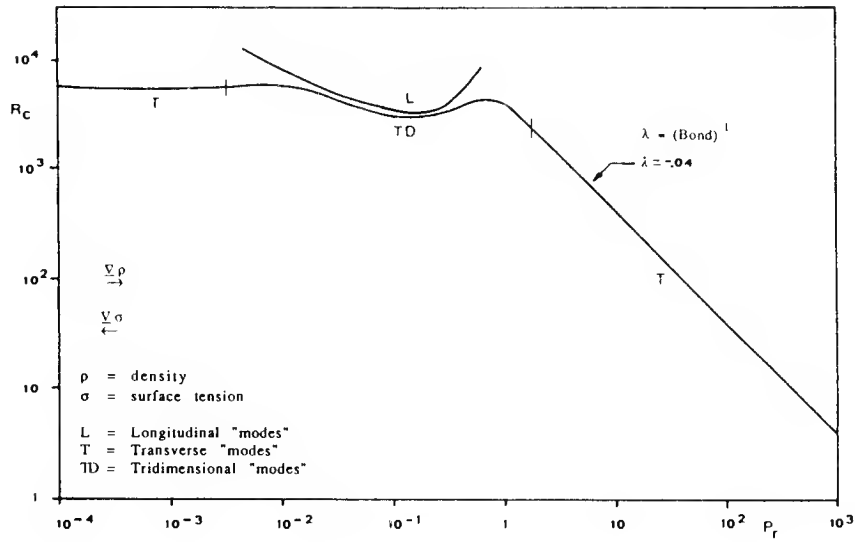
Fig. 8 - Critical Reynolds number (R_c) versus the Prandtl number (Pr) for $\lambda = -0.4$.
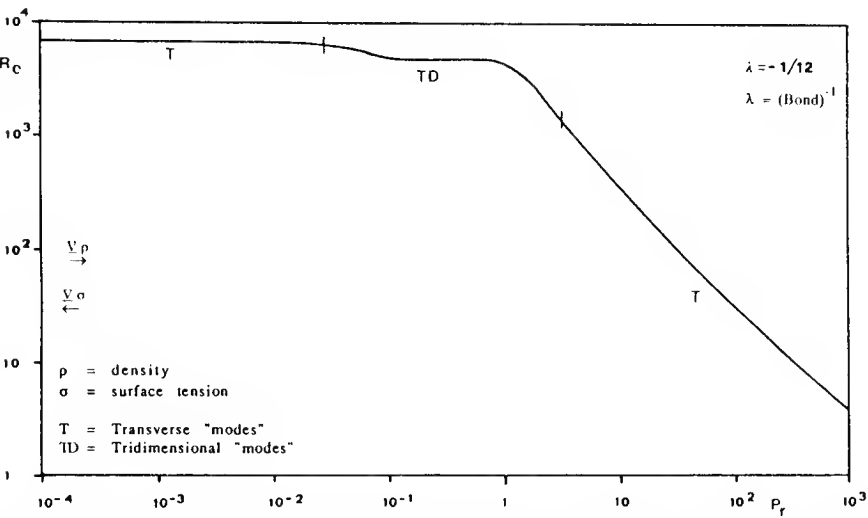
Fig. 9 - Critical Reynolds numer (R_c) versus the Prandtl number (Pr) for $\lambda = -1/12$. This case corresponds to the base flow profile with zero surface velocity.
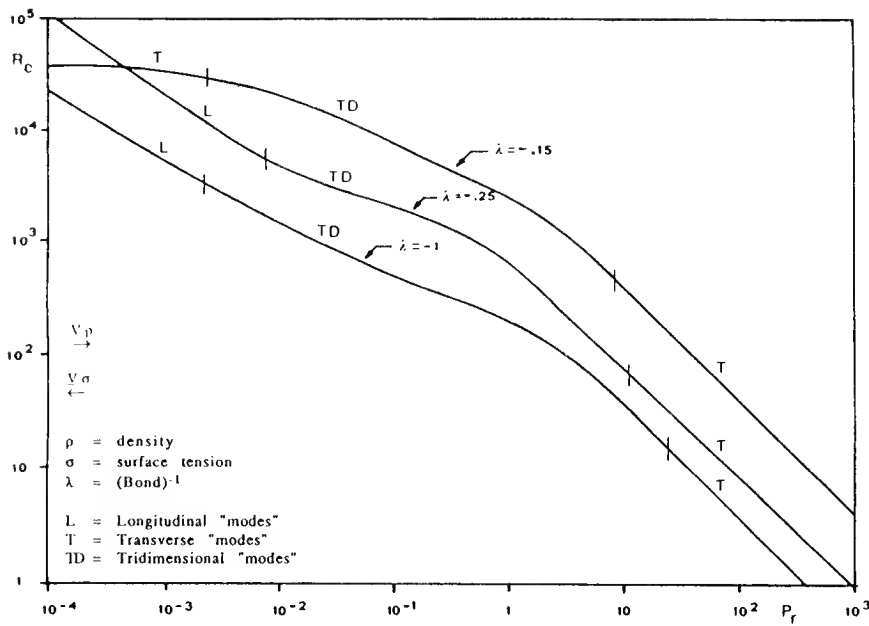
Fig. 10 - Critical Reynolds number (R_c) versus the Prandtl number (Pr) for some values of $\lambda < 0$.

Table 1. Critical Reynolds number $R_c(\mathrm{Pr}, \lambda)$ and product R_c Pr for various values of λ for $\mathrm{Pr}=0$, $\mathrm{Pr}=0.0001$, $\mathrm{Pr}=0.001$.

	Pr = 0.001		Pr = 0.0001		Pr = 0	
λ	R_c	R_cPr	R_c	R_cPr	R_c	R_cPr
$+\infty$	2119	2.119	13041	1.3041	28208	0
1	3769	3.769	22714	2.2714	71769	0
0.5	5089	5.089	30285	3.0285	186112	0
0.25	7026	7.026	40960	4.0960	327768	0
0.08	10911	10.911	63628	6.3628	97271	0
0.04	13134	13.134	33552	3.3552	33564	0
0.01	10112	10.112	10015	1.0015	10009	0
0	7743	7.743	7694	0.7694	7690	0
−0.01	6603	6.603	6581	0.6581	6579	0
−0.04	5364	5.364	5351	0.5351	5348	0
−1/12	6212	6.212	6202	0.6202	6201	0
−0.125	22631	22.631	22595	2.2595	22593	0
−0.15	29176	29.176	29105	2.9105	29098	0
−0.25	21708	21.708	121927	12.1927	124910	0
−0.5	8588	8.588	57339	5.7339	88751	0
−1	4880	4.880	30850	3.0850	52691	0
$-\infty$	2119	2.119	13041	1.3041	28208	0

analysis of Table 2, where the values of R_c and $\mathrm{Pr}R_c$, for $\mathrm{Pr}=10^2$ and $\mathrm{Pr}=10^3$, are reported for different values of the parameter λ, together with the limit for $\mathrm{Pr}\to\infty$, i.e. the $B(\lambda)$ values calculated by (26). Then the asymptotic formula for R_c is:

$$(28)\qquad R_c \to \frac{B(\lambda)}{\mathrm{Pr}} \quad [|\lambda| \in (10^{-2}, \infty)]$$

Since for $\lambda = \pm 10^{-2}$ R_c still decrease towards zero as Pr^{-1}, the case $\lambda = 0$ seems to have very particular properties. We believe that this case should be investigated thoroughly, studying, with suitable analytical methods, the asymptotic characteristics for $\mathrm{Pr}\to\infty$, for small values of the parameter λ.

Table 2. Critical Reynolds number $R_c(\mathrm{Pr}, \lambda)$ and product R_c Pr for various values of λ for Pr = 100, Pr = 1000, Pr = ∞.

	Pr = 100		Pr = 1000		Pr = ∞	
λ	R_c	R_cPr	R_c	R_cPr	R_c	R_cPr
$+\infty$	3.749	3749	0.395	395	0	398
1	21.501	21501	2.165	2165	0	2267
0.5	32.282	32282	3.249	3249	0	3256
0.25	53.621	53621	5.390	5390	0	5391
0.08	130.132	130132	13.060	13060	0	13053
0.04	223.653	223653	22.450	22450	0	22458
0.01	644.412	644412	68.840	66840	0	64881
0	8729.301	8729301	2813.100	2813100	0	∞ (*)
−0.01	198.591	198591	19.870	19870	0	19872
−0.04	44.371	44371	4.436	4436	0	19872
−1/12	32.023	32023	3.164	3164	0	3159
−0.125	140.352	140352	14.160	14160	0	14184
−0.15	44.463	44463	4.490	4490	0	4490
−0.25	9.531	9531	0.958	958	0	960
−0.5	5.323	5323	0.536	536	0	537
−1	4.143	4143	0.419	419	0	420
$-\infty$	3.749	3749	0.395	395	0	398

(*) For $\lambda=0$ (natural convection) is $R_c \mathrm{Pr}^{1/2} \to$ const.

A theoretical approach appears indispensable because, for high values of the product Pr R_c, one cannot be certain of the validity of the numerical results. In fact the spectrum for the temperature perturbation (coefficients c_i) could be so wide that, from the numerical point of view, the problem should be solved by means of direct integration of

the equations (if the spectrum is very wide there are numerical difficulties, for the solution of the algebraic problem (23), because one obtains matrices of great dimensions).

The results of the three cases previously analysed can be illustrated in the plane (Re, λ), for different values of the Prandtl number. They are shown in Figg. 11 and 12.

We can see the presence of a peak of stability for negative values of λ, near the value $\lambda = -0.15$ (remind what we said about this particular value of λ when we discussed the base flow in section 3). For very low Prandtl, we can see a lack of stability, near the point $\lambda = 0$. This occurrence can be explained if one remember that, for very low values of Prandtl, the instability is due mainly to the Reynolds stress, so that the stability strongly depends upon the velocity profile (see Figg. 3 and 4).

For $Pr = 0.1$ the lack of stability disappears, because the thermal convection prevails and then the influence of the velocity profile shape on the onset of instability becomes less important.

Increasing the Prandtl number a strong peak of stability for $\lambda = 0$ occurs. Concerning this, two remarks are needed. First, for Prandtl numbers greater than or equal to one, the Marangoni effect considerably contributes to the disturbance energy also for values of λ very close to zero, so that when this effect vanishes, for $\lambda = 0$, a strong increase of the stability boundary can occur. On the other hand, as already remarked, the case of natural convection presents particular behaviours and it needs of further investigations; in this regard an analysis of the dependence on λ of the disturbance energy for high Prandtl number will be helpful.

In Figg. from 13 to 16 the domain of linear stability is illustrated, for a more useful reading, in the plane (R_M, R_G), where $R_M = V_m / V_\nu$ and $R_G = V_g / V_\nu$ are the conditional Reynolds number, defined in terms of the Marangoni and buoyant speeds, respectively. The ratio of these two nondimensional numbers is just equal to the parameter λ. The curves in the plane (R_M, R_G) show the peaks of stability and instability already commented in the plane (Re, λ).

The area inside these diagrams is the domain of linear stability for the basic motion under study. In fact, if we assume as reference velocity the diffusive viscous speed V_ν, then R_M and R_G should appear as independent parameters in the field equations and in the base flow, instead of the Marangoni and Grashof numbers, respectively. Thus the domain of stability can be defined varying one parameter, for fixed values of the other. The results obtained in this way are equivalent to those obtained
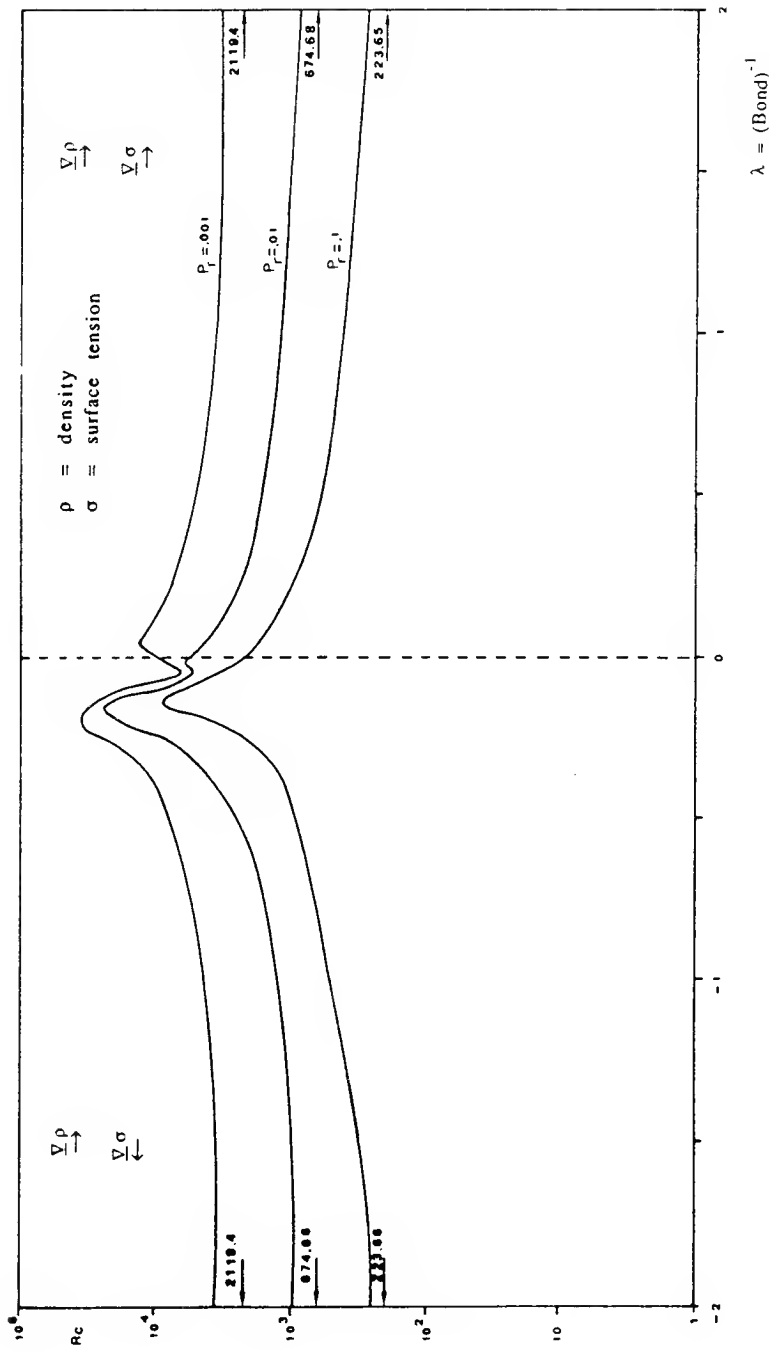
Fig. 11 - Critical Reynolds number (R_c) versus λ for Prandtl numbers $Pr = 0.001$, $Pr = 0.01$, $Pr = 0.1$. On the sides are reported the asymptotic values for $\lambda = \pm\infty$ (Marangoni convection).
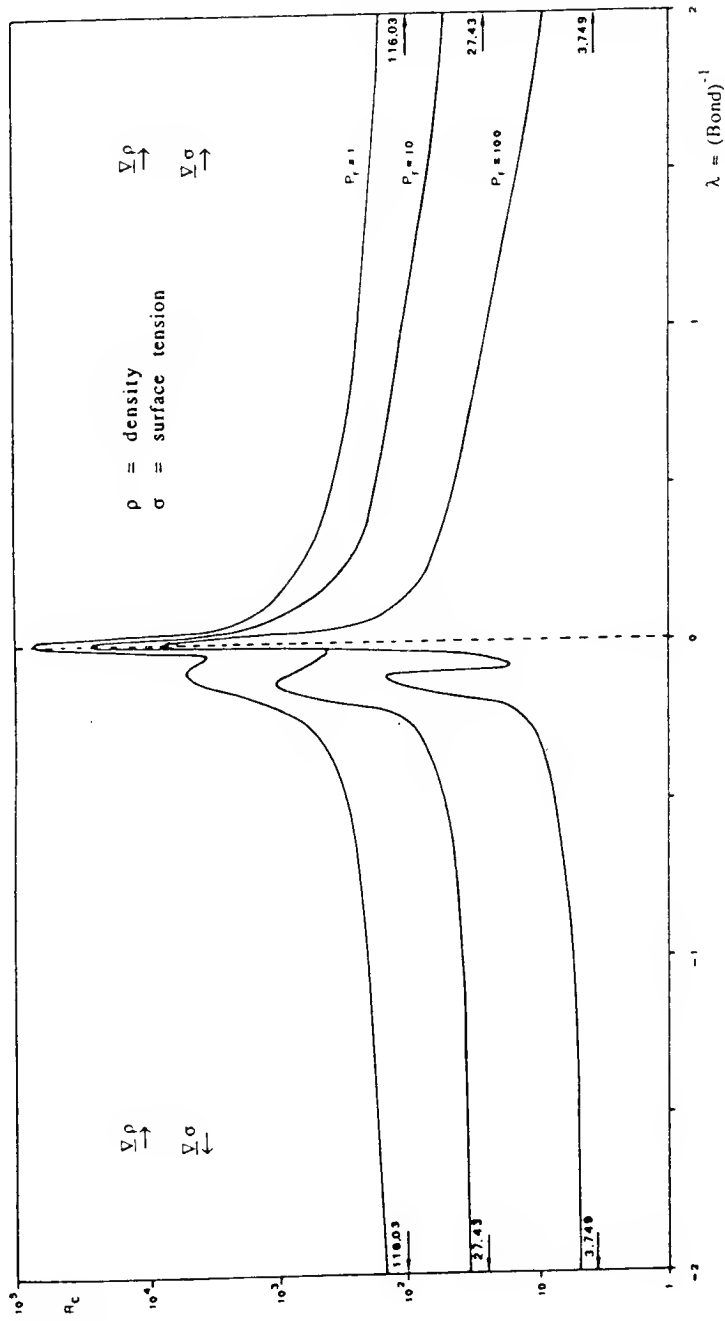
Fig. 12 - Critical Reynolds number (R_c) versus λ for Prandtl numbers Pr = 1, Pr = 10, Pr = 100. On the sides are reported the asymptotic values ofr λ = ± ∞ (Marangoni convection).
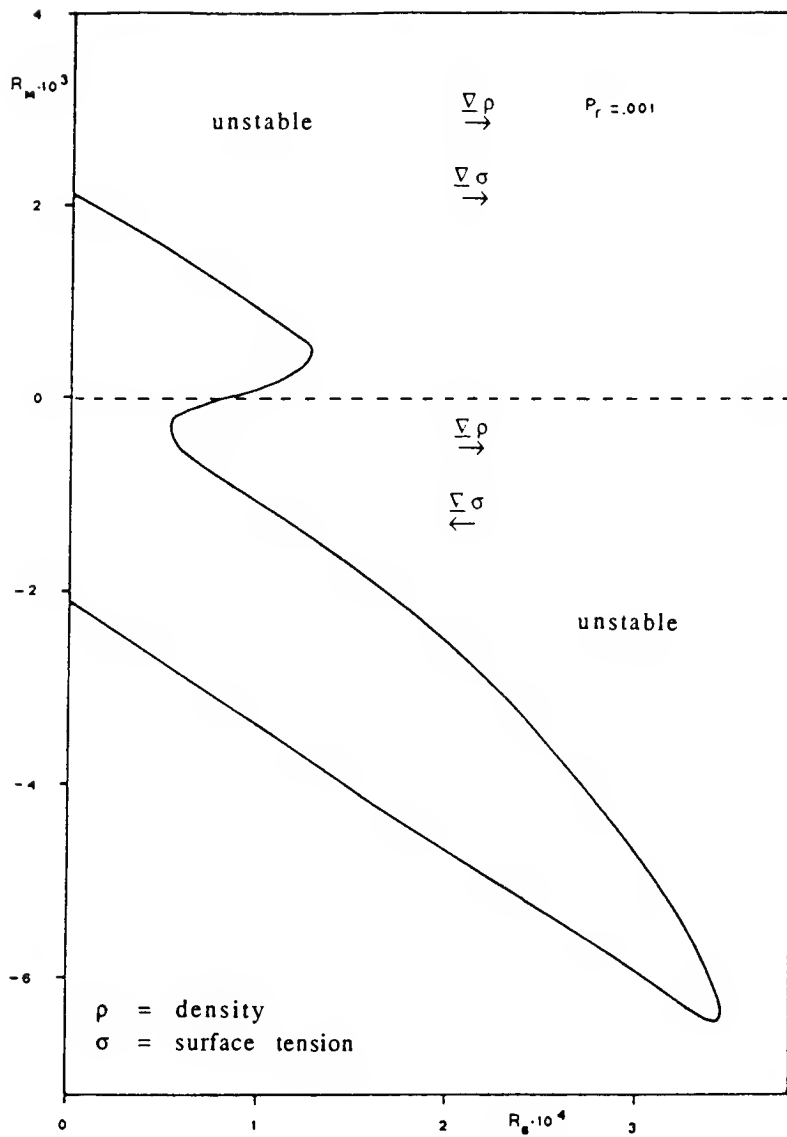
Fig. 13 - Linear stability domain in (R_M, R_G) plane for the Prandtl number Pr = 0.001. $R_M = V_M/V_\nu$; $R_G = V_g/V_\nu$; V_m, V_g and V_ν are, respectively, the Marangoni, the buoyant and the viscous diffusive velocities.
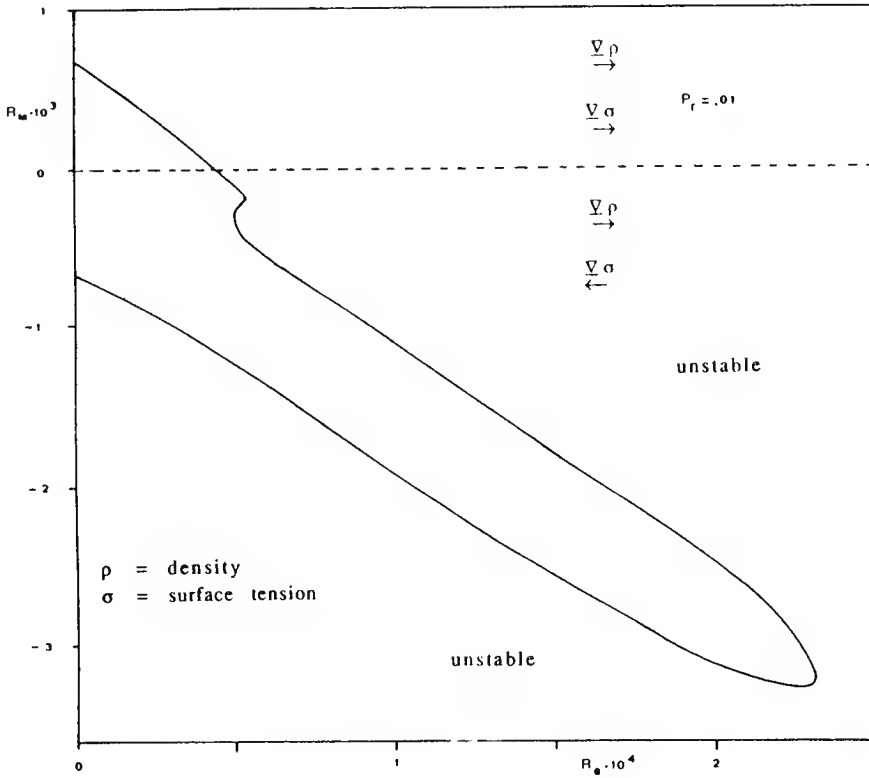
Fig. 14 - Linear stability domain in (R_M, R_G) plane for the Pandtl number Pr = 0.01. $R_M = V_m/V_\nu$; $R_G = V_g/C_\nu$; V_m, V_g and V_ν are, respectively, the Marangoni, the buoyant and the viscous diffusive velocities.

in the plane (Re, λ). In fact, $R_M = M$ Re, $R_G = G$ Re, and we have found just $(R_M)_c = M R_c$, and $(R_G)_c = G R_c$.

In the plane (R_M, R_G) the results can be read either for fixed λ (Bond) (along straight lines starting from the axes origin) or for fixed values of the Marangopni and gravitational effects.

For Pr < 1 (Figg. from 13 to 15) and $R_M > 0$, as R_G increases, the corresponding critical value of R_M decreases, i.e. the gravitational field acts as an unstabilizing effect on the flow due to surface tension gradients. Viceversa, for $R_M < 0$ (buoyancy and surface tension convection adverse) the gravitational effect is stabilizing, so that the critical values of R_M and R_G are greater than the critical ones corresponding to pure Marangoni and natural convection.

For high values of the Prandtl number (see Fig. 16), corresponding
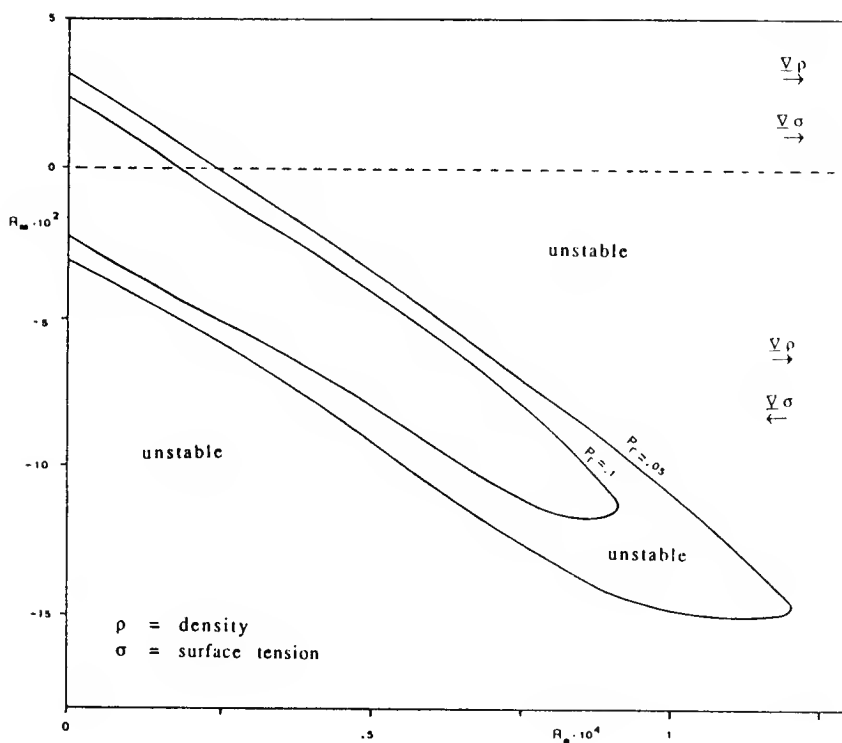
Fig. 15 - Linear stability domains in (R_M, R_G) plane for Prandtl numbers Pr = 0.05 and Pr = 0.1. $R_M = V_m/V_\nu$; $R_G = V_g/V_\nu$; V_m, V_g and V_ν are, respectively, the Marangoni, the buoyant and the viscous diffusive velocities.

to Pr = 20), the diagram is strongly twist because of the peak of stability corresponding to $R_M = 0$ $(\lambda = 0)$. However, for $R_M < 0$ it is still possible to see the typical peak of stability near the value $\lambda = -0.15$, already pointed out and discussed in the plane (Re, λ).

6. ENERGY STABILITY ANALYSIS

We shall now examine the stability of the basic state by the method of the energy. For a wide account of this method see the monograph of Joseph (1976) and for late developments that of Galdi and Rionero (1985).
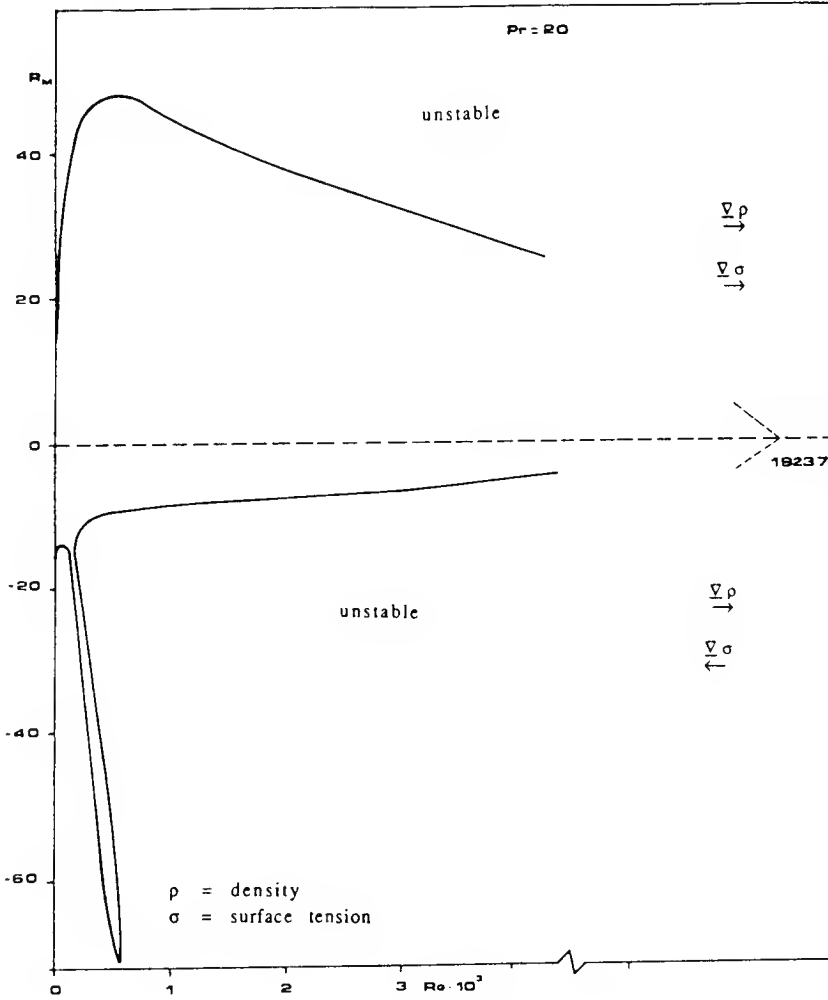
Fig. 16 - Linear stability domain in (R_M, R_G) plane for the Prandtl number $\mathrm{Pr} = 20$. $R_M = V_m / V_\nu$; $R_G = V_g / V_\nu$; V_m, V_g and V_ν are, respectively, the Marangoni, the buoyant and the viscous diffusive velocities.

Let $(\bar{\underline{v}}, \bar{p}, \bar{T})$ be the solution of the basic state, and let $(\underline{v}', p', T')$ be any other solution to the Boussinesq equations (3) and boundary conditions (4), (5). Now let

(29a) $\qquad \underline{v} = \underline{v}' - \bar{\underline{v}}$

(29b) $\vartheta = T' - \bar{T}$

(29c) $\pi = p' - \bar{p}$

$(\underline{v}, \pi, \vartheta)$ represents the difference between the disturbed and undisturbed states. Since both $(\bar{\underline{v}}, \bar{p}, \bar{T})$ and $(\underline{v}', p', T')$ satisfy the system (3), (4), (5), we obtain the following non-linear system governing the evolution of the disturbances $(\underline{v}, \pi, \vartheta)$:

(30a) $$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \bar{\underline{v}} \cdot \underline{\nabla}\, \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla}\, \bar{\underline{v}} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla}\, \underline{v}\right) + \underline{\nabla}\, \pi = \nabla^2 \underline{v} + G\vartheta \underline{i}_z$$

(30b) $$\mathrm{Pe}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \bar{\underline{v}} \cdot \underline{\nabla}\, \vartheta + \underline{v} \cdot \underline{\nabla}\, \bar{T} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla}\, \vartheta\right) = \nabla^2 \vartheta$$

(30c) $$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$$

(30d) $$u = v = w = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0 \qquad \text{for } z = 0$$

(30e) $$w = \frac{\partial u}{\partial z} + M\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} + M\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0 \qquad \text{for } z = 1$$

Since the ranges of x and y are infinite, we must consider that all disturbance quantities remain bounded for $|x| \to \infty$, $|y| \to \infty$, so that the energy integrals exist. We shall confine our attention to disturbance functions $(u, v, w, \pi, \vartheta)$ in the class $\mathcal{J}$

$$\mathcal{J} = \left\{ f \,\middle|\, \int_0^\infty |f|\, dx < \infty \right\}$$

where f is either

a) periodic in x and y
b) Fourier transformable in x and y
c) Fourier transformable in either x or y and periodic in the other.

In case (a), we define the integral over a volume $\mathbb{R}$:

$$\langle f \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} f \, d_{\mathbb{R}} = \int_0^{2\pi/\alpha} \int_0^{2\pi/\beta} \int_0^1 f \, dx \, dy \, dz$$

and the surface integral at $z = 1$:

$$\langle f \rangle_1 \equiv \int_1 f = \int_0^{2\pi/\alpha} \int_0^{2\pi/\beta} f(x, y, 1) \, dx \, dy$$

where f is any disturbance function and α and β are the wave-numbers in the x and y directions, respectively.

In case (b) the integrals will extend from $-\infty$ to $+\infty$ in the coordinate x and y, and in case (c) they will extend over a wavelength in coordinate in which the function is periodic and from $-\infty$ to $+\infty$ in the coordinate in which the function is Fourier transformable.

We now form the scalar product of (30a) with $\underline{v}$, multiply (30b) for ϑ, and integrate over the volume $\mathbb{R}$. We employ the Gauss theorem and the fact that $\underline{v}$ and $\bar{\underline{v}}$ are divergence-free and, by accounting for the boundary conditions on the surfaces $z = 0$ and $z = 1$, obtain:

Energy Identity

$$\text{(31a)} \qquad \mathrm{Re} \frac{dK}{dt} = - \langle \underline{\nabla} \, \underline{v} : \widetilde{\underline{\nabla} \, \underline{v}} \rangle - \mathrm{Re} \langle \underline{v} \cdot (\underline{\nabla} \, \bar{\underline{v}})^s \cdot \underline{v} \rangle + G \langle \underline{v} \cdot \underline{i}_z \vartheta \rangle - M \langle u \vartheta_x + v \vartheta_y \rangle_1$$

Entropy Identity

$$\text{(31b)} \qquad \mathrm{Pe} \frac{d\Theta}{dt} = - \langle \underline{\nabla} \, \underline{\vartheta} \cdot \underline{\nabla} \, \underline{\vartheta} \rangle - \mathrm{Pe} \langle \vartheta \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \, \bar{T} \rangle$$

where

$$\text{(31c-d)} \qquad K = \langle \frac{\underline{v} \cdot \underline{v}}{2} \rangle \qquad \Theta = \langle \frac{1}{2} \vartheta^2 \rangle$$

(31e) $$(\underline{\nabla}\,\underline{\bar{v}})^s = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{u}_z \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{u}_z & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

where the subscripts denote differentiation and ~ transposition.

By introducing the coupling parameter (Joseph 1965) Λ, we define the energy fucntional

(32) $$E_\Lambda = K + \Lambda \operatorname{Pr} \Theta$$

The coupling parameter Λ must be greater than zero in order to insure that the condition $E_\Lambda \to 0$ is satisfied if and only if both K and Θ approach zero.

We can obtain an expression for the rate of chance of E_Λ by adding (31a) and (31b):

(33a) $$\operatorname{Re} \frac{dE_\Lambda}{dt} = -\Delta + \operatorname{Re} \mathbb{P} + \Sigma$$

where

(33b) $$\Delta = \langle \underline{\nabla}\,\underline{v} : \underline{\nabla}\,\underline{v} \rangle + \Lambda \langle \underline{\nabla}\,\vartheta \cdot \nabla \vartheta \rangle$$

(33c) $$\mathbb{P} = -\langle \underline{v} \cdot (\underline{\nabla}\,\underline{\bar{v}})^s \cdot \underline{v} \rangle - \operatorname{Pr} \Lambda \langle \vartheta \underline{v} \cdot \underline{\nabla}\,\bar{T} \rangle + \frac{G}{\operatorname{Re}} \langle \underline{v} \cdot \underline{i}_z \vartheta \rangle$$

(33d) $$\Sigma = -M \langle u\vartheta_x + v\vartheta_y \rangle_1$$

The flow is said to be asymptotically stable in the mean if $E_\Lambda \to 0$ for $t \to \infty$.

Defined, then, the maximum problem (following Davis and Von Kerczek 1973):

(34) $$\Omega = \max_\Gamma \frac{-\Delta + \operatorname{Re}\mathbb{P} + \Sigma}{\operatorname{Re} E_\Lambda}$$

$$\Gamma \equiv \{\underline{v}(u, v, w), \vartheta \mid \underline{v}, \vartheta \text{ with continuous second partial derivatives}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0,\ \underline{v}(x, y, 0) = 0,\ w(x, y, 1) = 0,\ u, v, w, \vartheta \in \mathcal{S}\}$$

from (33a) it follows

(35) $$\frac{1}{E_\Lambda} \frac{dE_\Lambda}{dt} \leqslant \Omega$$

so that the flow is stable if $\Omega < 0$.

For fixed Λ, the condition $\Omega = 0$ determines the Reynolds number R_Λ such that for Re $< R_\Lambda$ stability is guarantied, according to the previous definition.

The condition

(36a) $$\frac{\partial R_\Lambda}{\partial \Lambda} = 0$$

determines the optimal value Λ_{opt} of the coupling parameter Λ and the optimal «stability boundary»

(36b) $$R_E = R_{\Lambda\text{opt}}$$

The solution of the problem (34) can be obtained via the direct method of the variational calculus, by applying the Rayleigh-Ritz technique to the following functional

(37) $$F = -\Delta + \mathrm{Re}\,\mathbb{P} + \Sigma - \Omega\,\mathrm{Re}\,E_\Lambda + 2\langle \pi\, \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \rangle$$

where π is the Lagrange factor for the condition $\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$, when we does not work in a space of divergence-free vector.

We can also solve the problem (34), by defining the Eulero-Lagrange equations

(38) $$\delta F(v, \vartheta, \pi) = 0$$

and then solving the resulting differential eigenvalue problem for Ω via the Galerkin technique, as we have done for the eigenvalue problem of the linear theory.

By applying the variational procedure to (38) we obtain the problem:

(39a) $$\Omega\,\mathrm{Re}\,\underline{v} + \mathrm{Re}\,\underline{v} \cdot (\underline{\nabla}\,\underline{\bar{v}})^s + \underline{\nabla}\,\pi + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\vartheta \left(\Lambda\,\mathrm{Pr}\,\underline{\nabla}\,\bar{T} - \frac{G}{\mathrm{Re}}\,\underline{i}_z \right) = \nabla^2 v$$

(39b) $$\Omega \mathrm{Pe}\,\vartheta + \frac{\mathrm{Re}}{2\Lambda} \underline{v} \cdot \left(\Lambda \mathrm{Pr}\, \underline{\nabla}\, \bar{T} - \frac{G}{\mathrm{Re}} \underline{i}_z \right) = \nabla^2 \vartheta$$

(39c) $$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$$

(40a) $$u = v = w = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0 \qquad \text{for } z = 0$$

(40b) $$w = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{M}{2\Lambda} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{M}{2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{M}{2} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0 \qquad \text{for } z = 1$$

The last three conditions of (40 b) and the last one of (40a) are the natural conditions satisfied by the variational principle (34).

The problem (39), (40) defines an eigenvalue problem for the real parameter Ω. The principal eigenvalue of the problem coincides with the solution of the maximum problem (34).

Let us now express the disturbance function as:
in case (a)

$$f = \text{Real } [\hat{f}(z, \alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x + \beta y)}]$$

and in case (b)

$$f = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(z, \alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha\, d\beta$$

Separate the variables or Fourier transform the system (39)-40). In either case (a), (b), (c) the only influence of the x and y variation is to introduce the wave-numbers α and β, and the system for the perturbation amplitudes $\hat{u}(z)$, $\hat{v}(z)$, $\hat{w}(z)$, $\hat{\pi}(z)$, $\hat{\vartheta}(z)$ will be, by eliminating the symbol ^ in order to simplify the notation:

(41a) $$(D^2 - k^2)\, u = \Omega \mathrm{Re}\, u + i\alpha\pi + \frac{\mathrm{Re}}{2}\, w D\bar{u} + \frac{1}{2} \mathrm{Re}\, \vartheta \Lambda \mathrm{Pr}$$

(41b) $$(D^2 - k^2)\, v = \Omega \mathrm{Re}\, v + i\beta\pi$$

(41c) $$(D^2-k^2)w=\Omega \mathrm{Re}\, w+D\pi+\frac{\mathrm{Re}}{2}\, uD\bar{u}+ + \frac{\mathrm{Re}}{2}\,\vartheta\left(\Lambda \mathrm{Pr} D\bar{T}-\frac{G}{\mathrm{Re}}\right)$$

(41d) $$(D^2-k^2)\vartheta=\Omega \mathrm{Pe}\,\vartheta+\frac{\mathrm{Re}}{2\Lambda}\left(\Lambda \mathrm{Pr}\, u\,\bar{T}_x+\Lambda \mathrm{Pr}\, wD\bar{T}-\frac{G}{\mathrm{Re}}\, w\right)$$

(41e) $$Dw+i\alpha u+i\beta v=0$$

(41f) $$u=v=w=D\vartheta=0 \qquad \text{for } z=0$$

(41g) $$w=D\vartheta+\frac{M}{2\Lambda}Dw=Du+\frac{M}{2}\, i\alpha\vartheta=Dv+\frac{M}{2}\, i\beta\vartheta=0$$
for $z=1$

where $D=\dfrac{d}{dz}$; $k^2=\alpha^2+\beta^2$

If $\Omega_{\max}$ is the maximum eigenvalue of the problem (41):

(42) $$\Omega_{\max}=\Omega_{\max}(\alpha,\beta,\Lambda,\mathrm{Pr},\lambda,\mathrm{Re})$$

then the condition $\Omega_{\max}=0$ defines the critical Reynolds number $R_{0,\Lambda}$ for fixed (α, β, Λ):

(43) $$R_{0,\Lambda}=R_{0,\Lambda}(\alpha,\beta,\Lambda,\mathrm{Pr},\lambda)$$

and the critical Reynolds of asymptotic stability for a fixed value of the coupling parameter Λ is given by:

(44) $$R_\Lambda=\min_{\alpha,\beta} R_{0,\Lambda}(\alpha,\beta,\Lambda,\mathrm{Pr},\lambda)$$

Finally, the optimal stability boundary determined by the energy theory, i.e. R_E, is:

(45) $$R_E=\max_{\Lambda} R_\Lambda=\max_{\Lambda}\,\min_{\alpha,\beta} R_{0,\Lambda}(\alpha,\beta,\Lambda,\mathrm{Pr},\lambda)$$

In the numerical solution of (41) it is sufficient that one search only the first quadrant of the $(\alpha-\beta)$ plane in order to find R_Λ because of the following symmetry properties of $R_{0,\Lambda}$ for fixed $(\Lambda, \mathrm{Pr}, \lambda)$:

(46a) $$R_{0,\Lambda}(\Lambda, \mathrm{Pr}, \lambda, -\alpha, \beta) = R_{0,\Lambda}(\Lambda, \mathrm{Pr}, \lambda, \alpha, \beta)$$

(46b) $$R_{0,\Lambda}(\Lambda, \mathrm{Pr}, \Lambda, \alpha, -\beta) = R_{0,\Lambda}(\Lambda, \mathrm{Pr}, \lambda, \alpha, \beta)$$

The relations (46) can be obtained, by noting that Ω is real, by transforming the ststem (41) as follows:

(47a) $$(u, v, w, \pi, \vartheta, \alpha, \beta, \Omega) \rightarrow (-u_1^*, v_1^*, -w_1^*, -\pi_1^*, -\vartheta_1^*, -\alpha_1^*, \beta_1, \Omega_1)$$

(47b) $$(u, v, w, \pi, \vartheta, \alpha, \beta, \Omega) \rightarrow (u_1, -v_1, w_1, \pi_1, -\vartheta_1, \alpha_1, \beta_1, \Omega_1)$$

where * denote the complex conjugate.

The numerical determination of R_E must be done by calculating R_Λ for various values of Λ and then taking its maximum value by, e.g. a polynomial interpolation of the points near the maximum.

However, it is possible to obtain, by parametric differentiation (that allows to deduce a general relation satisfied by the eigenvalue problem solution when the parameters are varied), the optimal coupling parameter Λ_{opt}, for each Pr and λ, in terms of the eigenfunctions which solve the problem at $\dfrac{\partial \mathrm{R}_\Lambda}{\partial \Lambda} = 0$.

In our case, by putting $\Omega = 0$ in (39), (40) and then performing the parametric differentiation, we obtain

(48) $$\Lambda_{\mathrm{opt}} = -\frac{G}{\mathrm{Pe}} \frac{\langle w\vartheta \rangle}{\langle u\vartheta \bar{T}_x + w\vartheta \bar{T}_z \rangle} + \frac{M}{\mathrm{Pe}} \frac{\langle \vartheta w_z \rangle_1}{\langle u\vartheta \bar{T}_x + w\vartheta \bar{T}_z \rangle}$$

where u, v, w, ϑ are to be evaluated for $\Lambda = \Lambda_{\mathrm{opt}}$.

We note that for $\bar{T}_x = 0$ and $\bar{T}_z = -1$ (liquid layers heated from below) the expression (48) reduces to that one reported by Lebon e Cloot (1982) if one assumes as reference velocity the thermal diffusivity velocity V_α, as Lebon and Cloot have done.

With the expression of Λ_{opt} supplied by the (48), one can proceed iteratively in the search of R_E, by calculating R_Λ for a starting value of Λ, e.g. $\Lambda = 1$, and then modifying Λ according to the (48).

It must be underlined that the use of parametric differentiation implies the assumption of analyticity with respect to Λ of all the dependent variables, that can be only verified a-posteriori. For example, Shir and Joseph (1968) found a singularity in the dependent variables, manifested in the prediction of $\Lambda_{opt} = -1$, in violation of the restriction $\Lambda < 0$.

So, in this first analysis by the energy method of the basic state under study, we shall confine our attention to $\Lambda = 1$, that coincides with the original formulation of the energy method.

The problem (41) has been reformulated as a generalized algebraic eigenvalue problem, in the same way as we have done in the linear stability analysis, by using the Galerkin method. The expansion of the disturbance function is also the same and the matrix formulation is reported in Appendix II, together with the expression of Λ_{opt} in terms of the Galerkin coefficients for the velocity and temperature amplitude functions.

Because this is the first energy stability analysis of a problem of natural and Marangoni convection with a non zero basic state, we have verified the solution procedure and the numerical code on some cases reported in literature, both with static and dynamic basic state. For major details on this point see Viviani (1988).

7. RESULTS OF THE ENERGY STABILITY ANALYSIS

The results of the stability analysis via the energy method are illustrated in the (R_M, R_G) plane. Figg. 17, 18, 19, report the stability domains for Prandtl numbers Pr = 0.001 and Pr = 0.01, Pr = 0.1, Pr = 1, respectively.

The diagram show in Fig. 17 is similar to that obtained by the linear analysis (Fig. 13), but the values of the stability are about 5-6 times less than those one of the linear stability boundary.

As the Prandtl number increases the stability diagrams modify until they become symmetrical with respect to the axis $R_M = 0$ (Pr $\geqslant$ 0.1 in Figg. 18 and 19). This occurrence clearly point out that the energy method is less accurate than the linear stability analysis, as it is possible to deduce by comparing the results shown in Figg. 18 and 19 with the linear one of Figg. 14 and 15. Similar results from the application of the two methods are obtained only for very low Prandtl numbers, when the stability is controlled by the velocity field. As the Prandtl number increases, i.e. the relative importance of the thermal convection with respect to the momentum convection increases, the results show that,
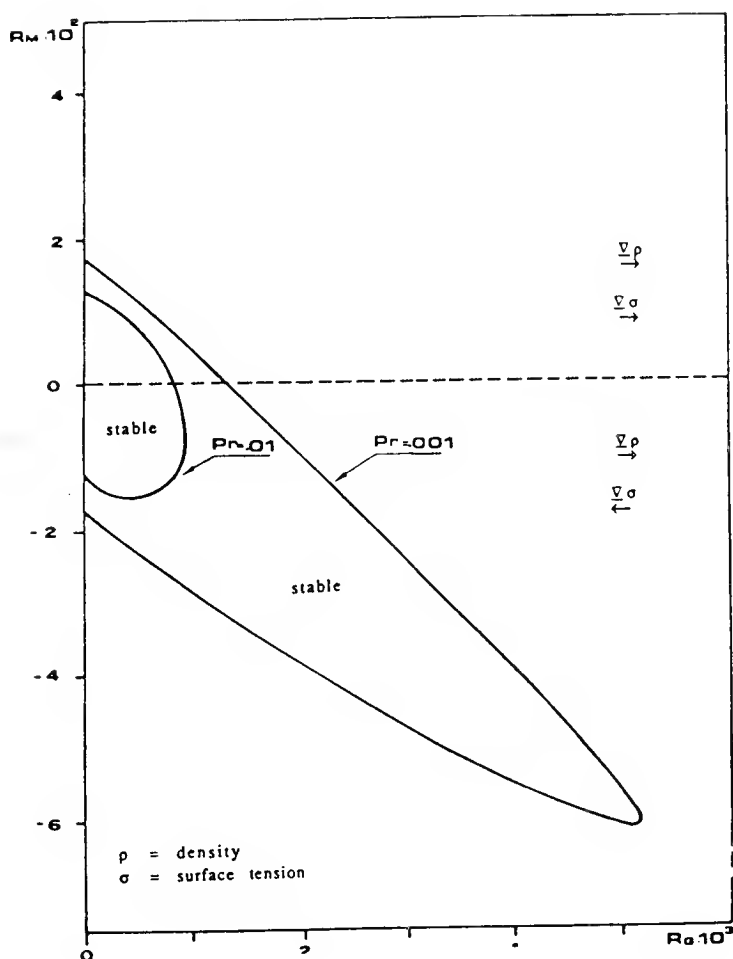
Fig. 17 - Stability domains in (R_M, R_G) plane obtained by the Energy method for Prandtl numbers Pr = 0.001 an Pr = 0.01. $R_M = V_m/V_\nu$; $R_G = V_g/V_\nu$; V_m, V_g and V_ν are, respectively, the Marangoni, the buoyant and the viscous diffusive velocities.

by using the energy method, one completely loses the detail of the flow field. This point must be object of further studies.

For Pr = 1 (see Fig. 19) the stability boundary in the case of Marangoni convection is $R_M = 8.984$, whereas the corresponding linear critical
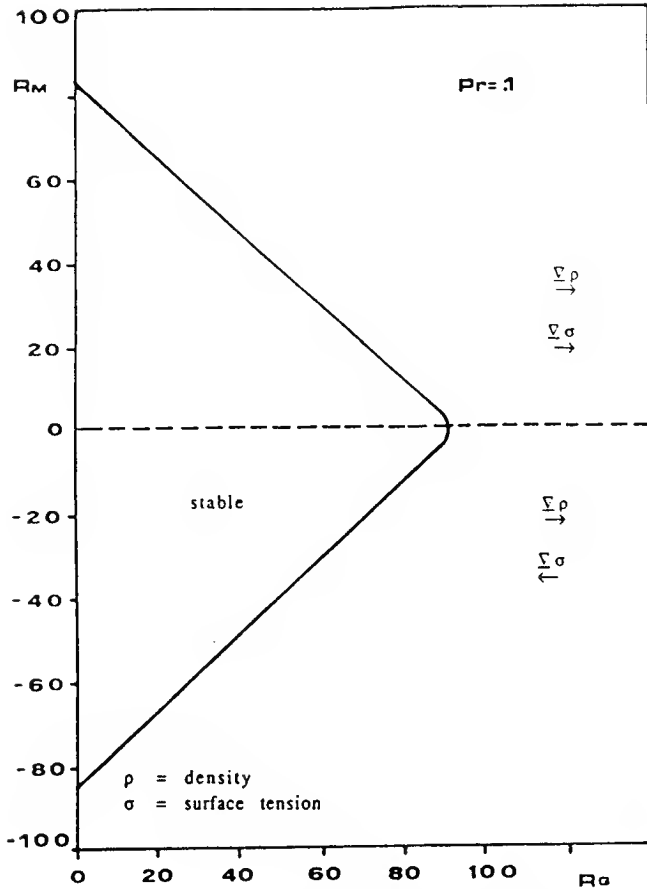
Fig. 18 - Stability domain in (R_M, R_G) plane obtained by the Energy method for Prandtl numbers Pr = 0.1. $R_M = V_m/V_\nu$; $R_G = V_g/V_\nu$; V_m, V_g and V_ν are, respectively, the Marangoni, the buoyant and the viscous diffusive velocities.

value of R_M is 116.028; in the case of natural convection the stability boundary is $R_G = 9.142$, greatly different from the value evaluated with the linear theory, which is equal to 82123. A comparison between the critical Reynolds number R_C and the Reynolds number R_E of asymptotic stability in the mean is reported in Tab. 3, for Marangoni and natural convection.

Results are not reported for Prandtl numbers greater than one, because
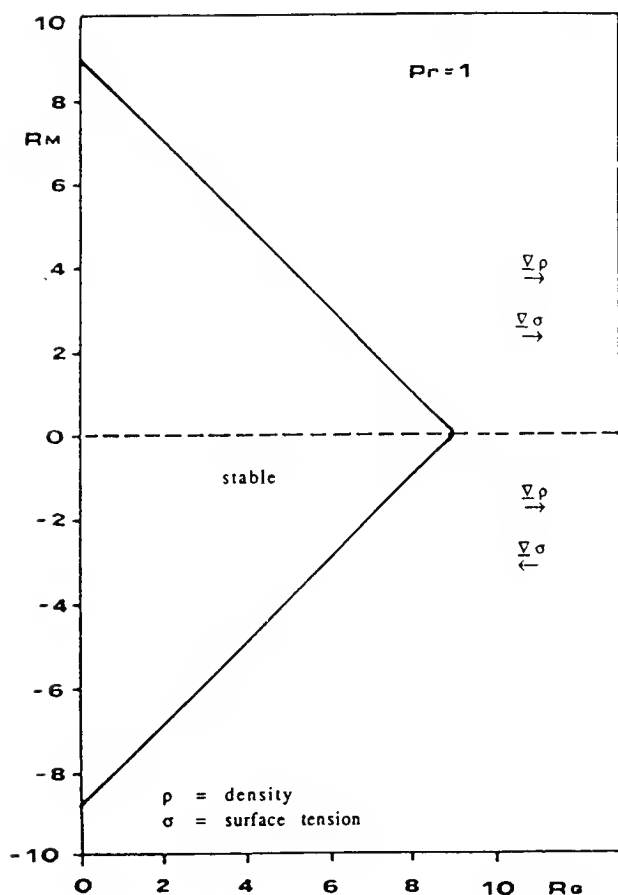
Fig. 19 - Stability domain in (R_M, R_G) plane obtained by the Energy method for Prandtl number Pr = 1. $R_M = V_m/V_\nu$; $R_G = V_g/V_\nu$; V_m, V_g and V_ν are, respectively, the Marangoni, the buoyant and the viscous diffusive velocities.

they can be obtained by dividing the result of Pr = 1 by the actual value of the Prandtl number. So, with the energy method, it si possible to conclude that for Pr → ∞, R_E approaches zero, approximately, as 10 Pr^{-1}, for all values of the parameter λ. The above asymptotic behaviour also holds in the case of natural convection, whereas by the linear theory we have found an asymptotic law as $Pr^{-1/2}$. The different asymptotic law for high Prandtl numbers supplied by the liner and energy theories in

Table 3 - Comparison between the results of linear theory and energy method for Marangoni and natural convection.

Pr	MARANGONI CONVECTION		NATURAL CONVECTION	
	R_C	R_E	R_C	R_E
0.001	2119.000	175.60000	7743	1394.0000
0.010	674.680	144.30000	4278	780.3000
0.100	223.653	85.88000	1781	91.3300
1.000	116.028	8.98400	82123	9.14200
10.000	27.430	0.89310	27183	0.91400
100.000	3.749	0.08920	8729	0.09140
1000.000	0.3953	0.00892	2813	0.00914

the case of natural convection, have been also encountered in the case of buoyant boundary layer on a vertical flat plate (Gill and Davey 1969: linear theory $\Rightarrow Pr^{-1/2}$; Dudis and Davis 1971: energy theory $\Rightarrow Pr^{-1}$). The asymptotic law, for $Pr \to \infty$, of R_c and R_E are summarized in Tab. 4.

Table 4 - Asymptotic laws for high Prandtl numbers.

THEORY / TYPE OF CONVECTION	LINEAR R_c	ENERGY R_E
NATURAL $\lambda = 0$	$C\ Pr^{-1/2}$	$\cong 10\ Pr^{-1}$
MARANGONI $\lambda = \pm\infty$	$397.8\ Pr^{-1}$	$\cong 10\ Pr^{-1}$
COMBINED $\lambda \neq 0$	$B(\lambda)\ Pr^{-1}$	$\cong 10\ Pr^{-1}$

for $\lambda \neq 0$ and $|\lambda| < 10^2$; $Pr \to \infty$ $\quad Rc \to 0$, $\quad Rc\ Pr \to B(\lambda)$

for $\lambda = 0$ $\quad Pr \to \infty$ $\quad Rc \to 0$, $\quad Rc\ Pr^{1/2} \to C$

$B(\lambda)$ has been evaluated by the asymptotic expression of the eigenvalue problem obtained by setting $Re = 0$ and $RePr = B$. The constant C has not yet been evaluated.

The ramerkable differences, both qualitative and quantitative, of the results obtained by using the liner theory and the energy method seem to demonstrate that the latter is not suitable for the search of sufficient stability conditions, for the class of flows here considered, because they are conservatively low. It will be necessary to solve the non-linear equations, both by numerical and spectral methods, in order to validate and/or correct the results of the linear theory. However, it must be point out that the present analysis has been performed by assuming the coupling parameter $\Lambda = 1$, and further studies are needed to analyze the influence of this parameter on the stability boundary.

8. CONCLUSIONS AND FINAL COMMENTS

A linear and energy stability analysis of Marangoni, natural and combined free convection in shallow cavities has been performed.

The «base flow», the stability of which has been analyzed, is a close form solution depending on the non-dimensional parameters Marangoni, Grashof, Reynolds and Prandtl numbers, under the hypotheses of planar and undeformablre free surface, and of surface tension linearly decreasing or increasing with the temperature.

The linear stability analysis has been performed with respect to tridimensional disturbances, and the resulting eigenvalue problem, for the evaluation of the critical Reynoldes number, has been solved with the spectral Galerkin method.

The critical Reynolds number has been calculated in the whole range of definition of the dynamic Bond number, and for Pr number ranging from 10^{-4} to 10^{3} as well as for the limiting cases $\mathrm{Pr} \to 0$ and $\mathrm{Pr} \to \infty$. For all values of Prandtl and Bond numbers we always found an oscillatory instability.

The linear stability boundary, defined by the critical Reynolds number, has been shown in the Reynolds-Prandtl plane, where the critical curves are reported in terms of a parameter λ, having the meaning of the inverse of the Bond number.

In the case of Marangoni convection, we confirm the results of a previous study of Smith (1982); for natural convection, our analysis with respect to tridimensional disturbances allowed to correct and to extend the results of Hart (1983) whose study was limited to two-dimensional longitudinal modes. Asymptotic laws for the critical Reynolds number, for high value of the Prandtl number, has been established. In the case of natural convection we found that R_c decreases as $\mathrm{Pr}^{-1/2}$; for the

other cases of Marangoni and combined convection R_c decreases as $B(\lambda)/Pr$, where the function $B(\lambda)$ has been numerically evaluated by solving the asymptotic form of the eigenvalue problem for $Pr \to \infty$.

The critical curves has been also reported in the plane (Re, λ) for various values of the Prandtl number, and this representation evidentiates a strong peak of stability, for high values of the Prandtl number, at the point $\lambda = 0$ (natural convection). In view of this result, and of the asymptotic behaviour of the critical Reynolds number, for $Pr \to \infty$, in the case $\lambda = 0$, further studies on this subject are needed.

The linear stability domains are shown in the plane (R_M, R_G), where the results can be read either for fixed Bond number or for fixed values of the Marangoni and gravitational effects.

By the energy method we have determined the domains of stability in the plane (R_M, R_G) and also evaluated the asymptotic behaviour of the stability boundary for high Prandtl numbers, by assuming the coupling parameter $\Lambda = 1$. For all the values of the Bond number R_E decreases for $Pr \to \infty$ as Pr^{-1}.

The results obtained seem to be highly conservative, i.e. the subcritical instability range is very large and, then, the energy method appears to be not appropriate to define sufficient conditions of stability for the basic state herein considered. The solution of the non-linear equations, both by numerical and spectral methods, will be necessary to confirm this conclusion. Further studies are also needed in order to evaluate the influence of the coupling parameter on the stability boundary.

9. ACKNOWLEDGEMENTS

Part of this work has been developed in the Ph.D. Dissertation of A. Viviani.

REFERENCES

CHANDRASEKHAR S., 1961, *Hydrodynamics and Hydromagnetic stability*, Oxford University Press.

CORMACK D.E., STONE G.P. & LEAL L.G., 1975, The effect of upper surface condition on convection in a shallow cavity with differentially heated end-walls. *Int. J. Heat Mass Transfer* **18**, 635.

COWELL W.R. (ed.) 1984, *Sources and Development of Mathematical Software*, Prentice-Hall.

DAVIS S.H., 1969, Buoyancy-Surface tension instability by the method of Energy. *J. Fluid Mech.* **39**, 347.

DAVIS S.H. & VON KERCZEK C., 1973, A reformulation of Energy stability theory. *Arch. Rational Mech. Anal.* **52**, 112.

DUDIS J.J. & DAVIS S.H., 1971, Energy stability of the buoyancy boundary layer. *J. Fluid Mech.* **47**, 381.'

GALDI G.P. & RIONERO S., 1985, Weighted Energy Methods in Fluid Dynamics and Elasticity. *Lecture Notes in Mathematics* **1134**, Springer-Verlag.

GILL A.E., 1974, A theory of thermal oscillations in liquids metals. *J. Fluid mech.,* **64**, 577.

GILL A.E. & DAVEY A., 1969, Instabilities of a buoyancy driven system. *J. Fluid Mech.* **35**, 775.

GUYON E. & PANTALONI J., 1980, Effect de tension superficielle sur la convection de Rayleigh-Benard. *C.R. Acad. Sci. Pars* **290B**, 301.

HART J., 1983, A note on the stability of low-Prandt-number Hadley circulations. *J. Fluid Mech.* **132**, 271.

HURLE D.T.J. & JAKEMAN E., 1981, Introduction to the techniques of crystal growth. *Physico Chem. Hydrodynam.* **2**, 237.

HURLE T.D.J., JAKEMAN E. & JOHNSON C.P., 1974, Convective temperature oscillations in molten gallium. *J. Fluid Mech.* **64**, 565.

JOSEPH D.D., 1965, On the stability of the Boussinesq equations. *Arch. Rational Mech. Anal.* **20**, 59.

JOSEPH D.D., 1966, Non linear stability of the Boussinesq Equations by the Method of Energy. *Arch. Rational Mech. Anal.* **22**, 163.

JOSEPH D.D., 1976, Stability of fluid motions. *Springer tracts in natural phylosophy* **27** e **28** Springer-Verlag.

JOSEPH D.D. & CARMI S., 1969, Stability of Poiseuille flow in pipes, annuli and channels. *Quart. Appl. Math.* **26**, 575.

KAMOTANI Y., OSTRACH G. & LOWRY S., 1982, An experimental study of heat induced surface-tebnsion driven flows. In *Material Processing in the reduced gravity environment of space* (G.E. Rindone ed.), Material Res. Soc. Sym. Proc., **9**, North Holland, 161.

LEBON G., 1988, Problems in Marangoni instabilities: A review. *NATO ASI Summer school on physico-chemical hydrodynamics.* La Rabida-Huelva (Spain).

LEBON G. & CLOOT A., 1982, Buoyancy and surface tension driven instabilities in presence of negative Rayleigh and Marangoni numbers. *Acta Mech.* **43**, 141.

LEBON G. & PEREZ-GARCIA C., 1980, Study of surface tension effects in thermal convection. *Bull. Acad. R. Belg.* **66**, 520.

LEE L.H. & REYNOLDS N.C., 1967, On the approximate and numerical solution of Orr-Sommerfield problems. *Quart J. Mech. Applied Math.* **20**, 1.

LEGROS J.C., LIMBOURG-FONTAINE M.C. & PETRE G., 1986, Surface tension minimum and Marangoni convection. *In Proc. Symp. on «Fluid dynamics and Space»*, Von Karman Institute 25-26 June, ESA-SP-265, 137.

NAPOLITANO L.G., 1978, Microgravitational fluid Dynamics. *2nd Levitch Conference*, Washington.

NAPOLITANO L.G., 1979, Thermodynamics and dynamics of surface phases. *Acta Astronautica* **6**, 1093.

NAPOLITANO L.G., 1982, Surface and buoyancy driven free convection. *Acta Astronautica* **9**, 199.

NAPOLITANO L.G. & VIVIANI A., 1989, Instability of Marangoni and combined free convection. *V International Conference on Waves and Stability in Continuous Media*, October 9-14, Sorrento (I).

NAPOLITANO L.G. & VIVIANI A., 1990 , Marangoni and combined free convection in shallow cavities. Effect of non linear surface tension and viscous dissipation. *To appear.*

NORMAND C., POMEAU Y. & VELARDE M.G., 1977, Convective instability: a physicist's approach. *Rev. Modern Phys.* **49**, 581.

SCHWABE D. & SCHARMANN A., 1981, The magnitude of thermocaplillary convection in larger melt volumes. *Adv. Space Res.* **1**, 13.

SEN A.K. & DAVIS S.H., 1982, Steady thermocapillary flows in two-dimensional slots. *J. Fluid Mech.* **121**, 163.

SHIR C.C. & JOSEPH D.D., 1968, Convective instability in a temperature and concentration field. *Arch. Rational Mech. Anal.,* **30**, 38.

SMITH M.K., 1982, The instabilities of thermocapillary shear layers. *Ph. D. Dissertation*, Northwestern University, Evanston (Illinois).

SMITH M.K. & DAVIS S.H., 1983, Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. *J. Fluid Mech.,* **132**, 119.

STEWART J.M. & WEINBERG F., 1971, Fluid flow in liquid metals, Experimental observations. *J. Crystal Growth* **12**, 228.

STRANI M., PIVA R. & GRAZIANI, 1983, Thermocapillary convection in a rectangular cavity: Asymptotic theory and numerical simulation. *J. Fluid Mech.,* **130**, 347.

UTECH H.P. & FLEMINGS M.C., 1967, Thermal convection in metal-Crystal Growth. *Physics Chem. Solids*, suppl. N. 1, 651.

VIVIANI A., 1988, *Ph. D. Dissertation*, University of Naples, Napoli (Italy), (in Italian).

APPENDIX I

Matrices of the algebraic eigenvalue problem of the linear stability

The matrices of the problem (23) are given by:

$$(I.1)\qquad \underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{D}} \\ \mathrm{Re}\underline{\underline{E}} & \underline{\underline{F}} & \underline{\underline{0}} \\ \mathrm{Pe}\underline{\underline{G}} & \mathrm{Pe}\underline{\underline{H}} & \underline{\underline{L}} \end{vmatrix} - i\alpha\mathrm{Re} \begin{vmatrix} \underline{\underline{M}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \frac{1}{\mathrm{Re}}\underline{\underline{N}} & \underline{\underline{P}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \mathrm{Pr}\underline{\underline{Q}} \end{vmatrix}$$

$$(I.2)\qquad \underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{Re}\underline{\underline{R}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \mathrm{Re}\underline{\underline{S}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \mathrm{Pe}\underline{\underline{V}} \end{vmatrix} - i\frac{\alpha\mathrm{Re}}{k^2} \begin{vmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{K}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{vmatrix}$$

where the submatrices are real and of dimension $N \times N$; the diagonal submatrices are symmetrical; $\underline{\underline{0}}$ denotes the null matrix; $\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{E}}$, $\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{L}}$, are decomposed as:

$$\underline{\underline{C}} = k^4\underline{\underline{C}}^1 + 2k^2\underline{\underline{C}}^2 + \underline{\underline{C}}^3$$

$$\underline{\underline{D}} = -k^2 G\underline{\underline{D}}^1 - k^2 M\underline{\underline{D}}^2$$

$$(I.3)\qquad \underline{\underline{E}} = -\frac{\beta^2}{k^2}\underline{\underline{E}}^1 - \frac{\alpha^2}{k^2}\underline{\underline{E}}^2$$

$$\underline{\underline{F}} = -k^2\underline{\underline{F}}^1 - \underline{\underline{F}}^2$$

$$\underline{\underline{L}} = -k^2\underline{\underline{L}}^1 - \underline{\underline{L}}^2$$

$$\underline{\underline{N}} = -\underline{\underline{N}}^1 - \frac{1}{k^2}\underline{\underline{N}}^2$$

The coefficient of the above submatrices are defined by:

$$C^1_{m,n} = \langle w_m, w_n \rangle; \qquad C^2_{m,n} = \langle Dw_m, Dw_n \rangle;$$

$$C^3_{m,n} = \langle D^2 w_m, D^2 w_n \rangle$$

$$D^1_{m,n} = \langle w_m, \vartheta_n \rangle; \qquad D^2_{m,n} = \langle Dw_m, D\vartheta_n \rangle_1;$$

$$E^1_{m,n} = \langle D\bar{u}\, u_m, w_n \rangle; \qquad E^2_{m,n} = \langle \bar{u}\, u_m, Dw_n \rangle;$$

$$F^1_{m,n} = \langle u_m, u_n \rangle; \qquad F^2_{m,n} = \langle Du_m. Du_n \rangle;$$

$$G_{m,n} = -\langle D\bar{T}\vartheta_m, w_n \rangle, \quad H_{m,n} = -\langle \bar{T}_x \vartheta_m, u_n \rangle; \tag{I.4}$$

$$L^1_{m,n} = \langle \vartheta_m, \vartheta_n \rangle; \qquad L^2_{m,n} = \langle D\vartheta_m, D\vartheta_n \rangle;$$

$$M_{m,n} = \langle w_m, (\bar{u}L - D^2\bar{u})\, w_n \rangle$$

$$N^1_{m,n} = \langle u_m, Dw_n \rangle; \qquad N^2_{m,n} = \langle Du_m, D^2 w_n \rangle;$$

$$P_{m,n} = \langle \bar{u}\, u_m, u_n \rangle; \qquad Q_{m,n} = \langle \bar{u}\, \vartheta_m, \vartheta_n \rangle$$

$$R_{m,n} = \langle w_m, Lw_n \rangle; \qquad S_{m,n} = \langle u_m, u_n \rangle$$

$$V_{m,n} = \langle \vartheta_m, \vartheta_n \rangle; \qquad K_{m,n} = \langle u_m, Dw_n \rangle$$

$\beta = 0$

In the case $\beta = 0$ the matrix $\underline{\underline{A}}$ can be expressed in the following form:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{Vmatrix} \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{D}} \\ \mathrm{Re}\underline{\underline{E}} & \underline{\underline{F}} & \underline{\underline{0}} \\ \mathrm{Pe}\underline{\underline{G}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{L}} \end{Vmatrix} - i\alpha \mathrm{Re} \begin{Vmatrix} \underline{\underline{M}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \frac{1}{\mathrm{Re}}\underline{\underline{N}} & \underline{\underline{P}} & \underline{\underline{0}} \\ \frac{\mathrm{Pr}}{\alpha^2}\underline{\underline{J}} & \underline{\underline{0}} & \mathrm{Pr}\underline{\underline{Q}} \end{Vmatrix} \tag{I.5}$$

where $J_{m,n} = \langle \bar{T}_x \vartheta_m, Dw_n \rangle$.

The problem can then be reduced to dimension $2N \times 2N$:

$$A = \begin{vmatrix} \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{D}} \\ \mathrm{Pe}\underline{\underline{G}} & \underline{\underline{L}} \end{vmatrix} - i\alpha\mathrm{Re} \begin{vmatrix} \underline{\underline{M}} & \underline{\underline{0}} \\ \frac{\mathrm{Pr}}{\alpha^2}\underline{\underline{J}} & \mathrm{Pr}\underline{\underline{Q}} \end{vmatrix} \tag{I.6}$$

$$B = \begin{vmatrix} \mathrm{Re}\underline{\underline{V}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \mathrm{Pe}\underline{\underline{V}} \end{vmatrix}$$

Pr = 0

For $\mathrm{Pr}=0$ (and Re finite) the solution for the temperature field is $\vartheta=0$. The matrices $\underline{\underline{A}}$ and $\underline{\underline{B}}$ become:

$$A = \begin{vmatrix} \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{0}} \\ \mathrm{Re}\underline{\underline{E}} & \underline{\underline{F}} \end{vmatrix} - i\alpha\mathrm{Re} \begin{vmatrix} \underline{\underline{M}} & \underline{\underline{0}} \\ \frac{1}{\mathrm{Re}}\underline{\underline{N}} & \underline{\underline{P}} \end{vmatrix} \tag{I.7}$$

$$B = \begin{vmatrix} \mathrm{Re}\underline{\underline{R}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \mathrm{Re}\underline{\underline{S}} \end{vmatrix} - i\frac{\alpha\mathrm{Re}}{k^2} \begin{vmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{K}} & \underline{\underline{0}} \end{vmatrix}$$

APPENDIX II

The algebraic eigenvalue problem of the energy stability analysis

The algebraic eigenvalue problem for the evaluation of the critical Reynolds number R_E of the energy method is expressed as follows:

(II.1) $$\underline{\underline{A}}^E \underline{x} = \Omega \underline{\underline{B}} \underline{x}$$

where $\underline{\underline{B}}$ is the same as in (I.2), while the matrix $\underline{\underline{A}}^E$ is:

(II.2) $$\underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} \underline{\underline{C}} & \mathrm{Re}\underline{\underline{X}} & \underline{\underline{D}}^E \\ \mathrm{Re}\underline{\underline{E}}^E & \underline{\underline{F}} & \mathrm{Re}\underline{\underline{Y}} \\ \underline{\underline{G}}^E & \underline{\underline{H}}^E & \underline{\underline{L}} \end{vmatrix} - \frac{i\alpha \mathrm{Re}}{2} \begin{vmatrix} \underline{\underline{M}}^E & \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{Z}} \\ \frac{1}{\mathrm{Re}}\underline{\underline{N}} & \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{O}} \\ \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{O}} \end{vmatrix}$$

and the submatrices $\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{L}}$, $\underline{\underline{N}}$ are the same as in (I.1).

The elements of the matrices $\underline{\underline{X}}$, $\underline{\underline{Y}}$, $\underline{\underline{Z}}$, $\underline{\underline{E}}^E$, $\underline{\underline{M}}^E$, are defined by:

$$X_{m,n} = \frac{k^2}{2} \langle w_m, u_n D\bar{u} \rangle \qquad Y_{m,n} = -\beta^2 \frac{\Lambda \mathrm{Pr}}{2k^2} \langle u_m, \vartheta_n \bar{T}_x \rangle$$

(II.3) $$Z_{m,n} = \Lambda \mathrm{Pr} \langle w_m, D\vartheta_n \bar{T}_x \rangle \qquad E^E_{m,n} = -\frac{\beta^2}{2k^2} \langle u_m, w_n D\bar{u} \rangle$$

$$M^E_{m,n} = -\langle w_m, Dw_m D\bar{u} \rangle - \langle w_m, w_n D^2 \bar{u} \rangle$$

while the matrices D^E, G^E, H^E, are decomposed as:

$$\underline{\underline{D}}^E = \frac{1}{2} (-Gk^2 \underline{\underline{D}}^1 + Mk^2 \underline{\underline{D}}^2 + \Lambda \mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}\, k^2 \underline{\underline{D}}^3)$$

(II.4) $$\underline{\underline{G}}^E = \frac{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}{2} \underline{\underline{G}} + \frac{G}{2\Lambda} \underline{\underline{D}}^1 - \frac{M}{2\Lambda} \underline{\underline{D}}^2$$

$$\underline{\underline{H}}^2 = \frac{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}{2} \underline{\underline{H}}$$

where $\underline{\underline{D}}^1$, $\underline{\underline{D}}^2$, $\underline{\underline{G}}$, $\underline{\underline{H}}$, have been already defined for the linear problem, see the (I.4). For the sake of clearity, we report again the elements of these matrices together with the elements of the matrix $\underline{\underline{D}}^3$:

$$D^1_{m,n} = \langle w_m, \vartheta_n \rangle \qquad D^2_{m,n} = \langle Dw_m, \vartheta_n \rangle$$

$$D^3_{m,n} = \langle w_m, \vartheta_n D\bar{T} \rangle \tag{II.5}$$

$$G_{m,n} = -\langle \vartheta_m, w_n D\bar{T} \rangle \qquad H_{m,n} = -\langle \vartheta_m, u_n \bar{T}_x \rangle$$

The optimal value (48) of the coupling parameter Λ is given by (the superscript * denotes the complex conjugate):

$$\Lambda_{\text{opt}} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{G(\underline{a}^* \underline{\underline{D}}^1 \underline{c} + \underline{a} \underline{\underline{D}}^1 \underline{c}^*) - M(\underline{a} \underline{\underline{D}}^2 \underline{c} + \underline{a} \underline{\underline{D}}^2 \underline{c}^*)}{(\underline{c}^* \underline{\underline{H}} \underline{b} + \underline{c} \underline{\underline{H}} \underline{b}^*) + (\underline{c}^* \underline{\underline{G}} \underline{a} + \underline{c} \underline{\underline{G}} \underline{a}^*)} \tag{II.6}$$

Problemi non lineari di statica delle strutture

Placido CICALA*

Summary. *Three sample nonlinear problems concerning elastic structures show that the perturbation analysis of postcritical stability is not exhaustive: exploration of the nonlinear field by a series of trajectories may reveal important phenomena that investigation on the neighborhood of buckling cannot detect.*

Introduzione

Nell'analisi non lineare delle strutture è consueto seguire per passi l'evoluzione della deformazione a partire dallo stato indeformato o da uno di piccole deformazioni: ciò è opportuno per non «perdere il filo» nel groviglio che possono formare le linee corrispondenti a varie sequenze di configurazioni, nello spazio delle variabili rappresentative dello stato di tensione e deformazione; nel caso di corpi non elastici ciò permette di usare le leggi incrementali che esprimono il comportamento di tali materiali. Quindi le «traiettorie» sono individuate mediante una successione di punti corrispondenti a valori, convenientemente intervallati, di una variabile scelta come «parametro di percorso».

L'analisi del primo tronco della traiettoria, dall'origine alla prima, eventuale[1] singolarità (punto critico), in molti casi può essere linearizzata. La linearità deve essere abbandonata nell'esame della singolarità, di solito costituita dall'incrocio con altra linea (percorso deviato). Per l'esame del comportamento del corpo in quella situazione si possono ado-

* Dip. di Ing. Strutturale Politecnico di Torino, C.so Duca degli Abruzzi, 24, 10129 Torino, Italia.

(1) La singolarità non esiste sui percorsi relativi alla struttura con imperfezioni di forma o in presenza di carichi atti a provocare il tipo di deformazione relativa al cammino deviato: dunque la biforcazione al primo carico critico costituisce una situazione ecczionale nella realtà, ordinaria negli schemi della teoria.

perare per le variabili rappresentative sviluppi in serie di potenze dell'incremento Δ del parametro di percorso rispetto al valore all'incrocio: nelle equazioni complete (ossia non ridotte come sul percorso fondamentale) i termini in Δ conducono a determinare gli incrementi primi delle variabili «incipienti» e i valori base di quelle preesistenti; così i termini in Δ^2 precisano gli incrementi secondi delle incipienti e gli incrementi primi delle preesistenti. Così di seguito le successive potenze individuano l'andamento dei diversi rami, con le restrizioni note degli sviluppi in serie di potenze. È nota l'importanza di questa indagine, detta perturbativa, e la rilevanza dei risultati. Tuttavia l'attuale disponibilità di potenti strumenti di indagine numerica suggerisce di varcare la soglia e di avanzare nel campo non lineare, come coraggiosamente per allora, fece Eulero per i problemi di «elastica». Qui, appunto, si accenna ad alcuni risultati che non sarebbe stato possibile ottenere con l'analisi perturbativa, il cui uso, negli stessi campi, era risultato non meno laborioso ma meno esauriente.

La parete sottile cilindrica soggetta a compressione assiale

Nel 1946 Welter[(2)] pubblicò risultati di prove su pannelli cilindrici compressi assialmente, con imperfezioni iniziali artificialmente create. In particolare trovò che, se un pannello ha curvatura iniziale maggiore di quella imposta dalle guide nelle quali è posto in compressione, il suo comportamento migliora notevolmente. Su contratto della Cornell University venne sviluppata[(3)] un'indagine teorico-numerica sulla questione accennata e si trovò conferma dei risultati di Welter. Quello studio venne riesumato in un recento lavoro[(4)] e completato in parte. Qui si riferiscono alcuni risultati.

Nella fig. 1, in alto, è tracciato il grafico tensioni deformazioni per il cilindro sottile compresso assialmente. In ascissa sono riportati gli accorciamenti relativi $-\epsilon$ moltiplicati per il modulo elastico E, in ordinata la tensione media $-\sigma$: le due coordinate sono riferite alla tensione critica $\sigma_c = -2cE/R$ dove è $c = h/\sqrt{12(1-\nu^2)}$, h lo spessore, R il raggio del cilindro medio, ν il coefficiente di Poisson. Per il cilindro perfetto si

(2) G. Welter, J. Aero. Sci., 13, 593-596, (1946).
(3) P. Cicala, Quart. Appl. Math., Vol. IX, 275-293, (1951). Da qui sono ricavate le figg. 1 e 3.
(4) P. Cicala, *Vecchi studi e nuove prospettive*, Omaggio a Ceradini, Dpt. Ingegneria strutturale e geotecnica, Università di Roma, 1988.

arriva al punto critico O per il percorso fondamentale $\sigma = E\epsilon$. Da questo punto si diramano due percorsi deviati: quello «buono» che prosegue nella direzione di arrivo con cammino poco curvo e quello «cattivo» dove si ha il noto cedimento di scatto con ritorno indietro (snap back). Questo diagramma è ottenuto assumendo per gli spostamenti w normali alla parete una combinazione di due autofunzioni, quella a scacchiere di losanghe con fattore cw_1 e quella assialsimmetrica con fattore cw_2[5]. Nella parte inferiore della stessa figura sono tracciati i due percorsi OA, OB nel piano di coordinate w_1, w_2, limitato a $w_1 > 0$: nel semipiano $w_1 < 0$ esiste il grafico simmetrico con altri due percorsi equivalenti. Nella medesima figura sono illustrati i risultati relativi al cilindro imperfetto con deformazioni iniziali definite da valori assegnati w_1', w_2' dei due fattori, indicati con circoletto sul grafico inferiore. Le stesse lettere sono usate in ambedue i grafici a indicare punti e curve corrispondenti. Si constata che i percorsi con origine situata nell'angolo compreso fra la curva OA e l'asse $+w_2$ si accostano al ramo cattivo OB. Quelli con origine nell'angolo supplementare si dirigono verso l'asse $-w_2$. Questo tipo di evoluzione, che conduce a una legge $\sigma(\epsilon)$ meno svantaggiosa, è scartato se si assume una forma più generale per gli spostamenti. Infatti se si introducono per gli spostamenti assialsimmetrici due componenti in quadratura in modo che possa verificarsi uno slittamento assiale di queste onde rispetto a quelle a scacchiera, la possibilità enunciata scompare. Ciò risulta evidente dalla fig. 2 dove, nel grafico inferiore, nel semipiano sotto l'asse è rappresentata l'evoluzione delle due componenti in quadratura. La traiettoria g' che parte da un punto assai poco distante dal piano w_1, w_2 vira rapidamente per accostarsi alla linea a; la relativa caratteristica $\sigma(\epsilon)$, tracciata nel grafico superiore, rivela il cedimento di scatto, mentre la traiettoria contenuta nel piano w_1, w_2 (linea punteggiata g, corrispondente alla punteggiata g nel grafico σ, ϵ) mostra un buon comportamento della struttura. Dunque, per il guscio cilindrico indefinito, con completa libertà nella evoluzione delle deformazioni, per qualsiasi germe di deviazione dal cilindro circolare perfetto, la deformazione si evolve verso il comportamento di minore efficienza strutturale.

L'indagine svolta per il pannello delimitato da due generatrici di lunghezza $\pi\alpha\sqrt{cR}$ e da due archi di direttrice di sviluppo $\pi\beta\sqrt{cR}$, appoggiato su questo contorno, si ottennero risultati qualitativamente analoghi. La fig. 3 mostra, per il pannello perfetto, 4 percorsi deviati m_1, m_2, m_3, m_4

(5) Per le specificazioni sulle forme di distribuzione degli spostamenti si rinvia alle note citate.

che partono da due punti critici marcati con frecce nel grafico superiore. Per pannelli con deformazione iniziale rappresentata da punti prossimi alla traiettoria migliore m_1 si manifesta la tendenza a deviare da quella caratteristica: però il percorso n_1, prima di raggiungere il carico limite presenta un ampio tratto di eccellente comportamento, che può raggiungere il limite d'elasticità; quindi questa deformazione previa conferisee al pannello la massima robustezza. Le potenzialità degli strumenti numerici oggi disponibili, enormemente superiore a quella dei mezzi utilizzati nel 1950, può permettere un controllo delle favorevoli possibilità, sì da rimuovere il dubbio che queste svaniscano con l'introduzione di un maggior numero di gradi di libertà per gli spostamenti.

Flessotorsione delle funi metalliche con formazione di un cappio

Le funi metalliche, in conseguenza della loro costituzione per avvolgimento elicoidale di fili e trefoli, hanno il difetto di attorcigliarsi quando si diminuisce lo sforzo di trazione che esse sono destinate a sopportare, in presenza di torsioni originate dal loro avvolgimento. In queste situazioni si può formare un cappio che, quando la fune è nuovamente messa in tiro, può originare una frattura. Il fenomeno è particolarmente pericoloso quando le funi sono adoperate per sollevare pesi dal fondo del mare, perché in tal caso l'inconveniente non può essere corretto con intervento manuale. L'interesse tecnico di tale questione è messo in evidenza da una serie di studi promossi dalla Marina degli Stati Uniti.

Il carico critico della verga soggetta a trazione e torsione venne determinato un secolo fa da Greenhill. Posto che la verga abbia la medesima rigidezza flessionale EI per qualsiasi giacitura di flessione e che all'estremo 1 di un tronco lungo L sia applicata una forza $T\vec{i}$ è un momento $M\vec{i}$, che $-T\vec{i}$, $-M\vec{i}$ agiscano all'estremo O, essendo $\vec{i}$ un versore parallelo a 01, si ha la relazine

$$(1) \qquad y = x^2 - 1$$

essendo $y = TL^2/\pi^2 EI$, ossia lo sforzo di trazione rapportato al carico di Eulero, $x = ML/2\pi EI$ il momento torcente riferito al momento critico per trazione nulla. Tale momento $2\pi EI/L$, non raggiungibile dalla verga omogenea, si trova nel campo di impiego delle funi metalliche a causa della loro esigua rigidezza flessionale. Per esse, dunque, ha pratico interesse un ampio tratto della curva rappresentativa della (1), linea *1* della fig. 4. Tale parabola costituisce il limite inferiore del campo di

stabilità della verga. Per rappresentare la deformazione incipiente al punto critico, si stabiliscono coordinate cartesiane ortogonali ξ_1, ξ_2, ξ_3 di cui la prima è misurata lungo l'asse iniziale della verga. La deformazione critica dell'asse della verga può essere posta in forma complessa:

$$\xi_2 + i\xi_3 = A\,(e^{(x+1)\xi} - e^{(x-1)\xi}) \tag{2}$$

dove ξ è la variabile immaginaria $i\pi\xi_1/L$ che assume i valori O e $i\pi$ alle due estremità. Il coefficiente A è un complesso arbitrario.

L'arco di parabola sotto l'asse x rappresenta situazioni in cui il carico d'estremità $y < 0$ esercita una compressione. Per $x=0$ le deformazioni finite della verga sono calcolabili secondo Eulero. In una recente, interessante nota[6] Rosenthal determinò l'evoluzione delle deformazioni a partire dalle configurazioni anzidette sotto l'azione di momenti M crescenti. Nella nota citata si considera T come quantità modulare, mentre qui si attribuisce un segno a T, sicché la forza $T\vec{i}$ ha verso opposto a $\vec{i}$ quando $-T=P>0$. Il versore fisso $\vec{i}$ corre dall'estremo 0 della verga verso *1* quando il corpo è indeformato e non cambia quando i due punti si incrociano perché si crea il cappio[7].

Definito, come fa Rosenthal, l'angolo γ compreso fra la forza agente su uno dei punti terminali e la tangente alla linea d'asse con verso uscente, si pone $\alpha=\pi-\gamma$. Lungo l'arco $y<0$ della parabola è $\alpha=0$: la forza P ha verso entrante. Sull'asse $x=0$ i punti $y<-1$ rappresentano le soluzioni di Eulero con α crescente da zero a π mentre $-y$ va da *1* a ∞. Nella fig. 4 è tracciata presso il punto **a** la deformata per $\alpha=80°$, corrispondente a $y=-1.2939$ e presso il punto **b** la deformata per $\alpha=160°$, relativa a $y=-4.030$. In questo secondo caso, come per ogni $y<-2.18$, appare il cappio della linea d'asse. Rosenthal trovò la linea 3, segnata a tratti in fig. 4, come luogo dei punti per i quali si verifica quella intersezione. Se, tenendo y costante, si incrementa x da zero, l'angolo α cresce portandosi a π sulla linea 2 di equazione $y=1-x^2$, tracciata con tratto e punto sulla figura. Si nota che nelle configurazioni rappresentate da quella linea risultano scambiate le posizioni dei punti *0, 1* rispetto al versore $\vec{i}$, sicché la forza $P>0$ genera trazione, come

---

(6) F. Rosenthal, *Greenhill's formula and the mechanics of cable hockling*, Nav. Res. Lab. Rep. No. 7940.

(7) Precisato così il semipiano dove il punto rappresentativo va riportato nella fig. 4, si evita la sovrapposizione dei due semipiani che appare nella nota citata.

mostra il dettaglio relativo al punto c che si raggiunge da a nell'evoluzione indicata. Poiché le coppie M non hanno subito cambiamento di segno, la situazione di carico si presenta come è mostrato nel dettaglio, messo a raffronto con quello relativo al punto C, simmetrico di c rispetto all'asse x.

Le conclusioni di questa indagine risultano chiare dalla fig. 5 grazie alla rappresentazione adottata nella fig. 4. Se la fune viene messa in trazione (punto A) e poi assoggettata ad un momento inferiore a quello di Greenhill per trazione nulla (punto B, con $x < 1$), qualora si ribassi il carico T sino a cambiarne il segno, sussiste la configurazione diritta sino all'intersezione con l'arco inferiore della parabola di Greenhill. Un ulteriore aumento della forza $-T=P$ dà luogo alle inflessioni trovate da Rosenthal, con formazione del cappio all'intersezione con la curva 3. È probabile che lo stesso fenomeno si presenti quando si raggiunga lo stato critico nel ramo della curva di Greenhill con ordinate positive, ossia quando si segua una traiettoria discendente da un punto C (fig. 5) di ascissa > 1, e si parta dalla deformata critica che nel piano normale al versore $\vec{i}$ ha la forma cicloidale indicata dalla (2).

Gli stati critici per la verga soggetta a torsione e trazione (o compressione) sono stati determinati per varie condizioni di vincolo e si sono trovati grafici aventi forma simile alla parabola di Greenhill. Una disposizione di vincolo attuabile con relativa facilità per controlli sperimentali è stata considerata da Cicala e da Algostino[(8)]: due cerniere cilindriche ad assi paralleli, la cui distanza può essere variata, sono collegate alle estremità della verga con un accoppiamento rotoidale che permette l'introduzione controllata di sforzi torcenti. Per questo tipo di vincolo si è esaminata la stabilità[(9)]. Un'altra disposizione di vincolo attuabile, che consente un maggior grado di libertà agli estremi della verga, è costituita da giunti cardanici. Per questa situazione, per la verga soggetta a pura torsione, lo stato critico venne determinato da Koiter[(10)] e la stabilità postcritica fu esaminata da Cicala[(11)]: in questo caso e in presenza di carico assiale si sono trovati valori dei momenti critici nettamente inferiori ai valori che si ricavano dlla (1)[12]. In quella nota si è

(8) P. Cicala, *Helicoidal buckling of an elastic rod*, Meccanica, 1985, p. 124-126. F. Algostino, *Stati critici della verga soggetta a trazione e torsione*, AIMETA Res. Rep. No. 12, 1985.

(9) D. Bigi, P. Cicala, *Elastic stability of the rod subject to tension and torsion*, AIMETA Res. Rep. No. 13, 1985.

(10) W.T. Koiter, *Buckling of a flexible shaft under torque loads transmitted by Cardon joints*, Ing. Archiv, 1980, p. 369-373.

(11) P. Cicala, *Sulla stabilità elastica della verga soggetta a torsione ultracritica*, Atti d. Acc. d. Scienze Torino, 1986, p. 98-116.

(12) F. Algostino, D. Bigi, P. Cicala, *Nonlinear analysis of elastic round rods*, Meccanica, 1987, p. 203-209.

preparata la formulazione per l'esame di spostamenti finiti, ma non si è condotta la relativa indagine numerica. L'instabilità postcritica constatata nei lavori menzionati fa ritenere che imperfezioni della fune possano innescare l'attorcigliamento in uno stato subcritico: allora la traiettoria che scenda C, prima di arrivare alla linea degli stati critici, porterebbe a deformazioni che compromettono la resistenza: la prosecuzione di queste ricerche sarebbe quindi opportuna.

Grandi deformazioni piane di un corpo iperelastico

Per corpi molto deformabili come la gomma, i quali, sotto sollecitazioni statiche, possano ritenersi dotati di elasticità e isotropia, la formulazione di Mooney Rivlin fornisce l'interpretazione più semplice e plausibile del loro comportamento per grandi deformazioni. L'energia di deformazione viene espressa come funzione lineare dei primi due invarianti di Cauchy: la condizione di invariabilità del volume definisce il terzo invariante. Nel caso di moto piano, che qui è considerato, la teoria si semplifica ulteriormente coincidendo con quella detta «neohookean». Nel riferimento ad una terna fissa di vettori unitari ortogonali $\vec{i}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$), detto

$$\vec{P} = \vec{i}_\alpha x_a \tag{3}$$

il vettore di posizione nel corpo deformato e introdotta la matrice di Jacobi $p_{\alpha\beta} = \partial x_\alpha / \partial \xi_\beta$ mediante le coordinate cartesiane ξ_α del corpo deformato, l'energia specifica, a meno di una costante additiva, è scritta

$$W = \mu \, p_{\alpha\beta} \, p_{\alpha\beta} \tag{4}$$

con la costante d'elasticità μ. Le componenti del tensore di tensione di Lagrange sono ottenute per derivazione di W rispetto alle quantità $p_{\alpha\beta}$: poiché queste sono legate dal vincolo interno di incompressibilità, si aggiunge all'energia la variazione di volume con il moltiplicatore di Lagrange $-p$ che introduce nel tensore degli sforzi un componente sferico, con il carattere di pressione idrostatica (funzione della ξ_α).

Nel problema in esame, assunte $x = \xi_1$, $y = \xi_2$ come coordinate materiali, si scrivono per il corpo deformato le espressioni

$$x_1/\Lambda = x + U, \quad x_2/\Lambda = \lambda y + V, \quad p/\Lambda = \lambda + P \tag{5}$$

$$U = \Sigma \, U_j \sin jx, \quad V = \Sigma \, V_j \cos jx, \quad P = \Sigma \, P_j \cos jx \tag{6}$$

essendo Λ, λ costanti: le sommatorie (6) si estendono agli interi j da zero a n; i $3n+2$ fattori U_j, V_j, P_j sono funzioni di y. Per questi, dalle 3 equazioni differenziali (due di equilibrio e una di incompressibilità) si ricavano $3n+2$ equazioni differenziali ordinarie per media ponderale con i pesi $\sin jx$, $\cos jx$. In un lavoro in preparazione di Algostino e Cicala, si presentano in forma matriciale queste equazioni per qualsiasi valore di n. Il sistema differenziale risulta essere di ordine $4n$, separato da due integrali primi dove intervengono V_o, P_o. Analoga forma matriciale si dà per le condizioni al contorno, poste in numero $2n$ per ciascuno dei lati di contorno $y=$ costante. Si è programmata l'integrazione numerica delle equazioni differenziali e si sono elaborati metodi di «shooting» per la riduzione al problema di valori iniziali. Qui si presentano alcuni risultati.

I primi addendi nelle espressioni (5) rappresentano una deformazione uniforme che, nel piano, dà solo una tensione normale nella direzione $\vec{i}_1$. Per l'incompressibilità del corpo è $\Lambda^2\lambda=1$. Per $\lambda > 1$ si ha una compressione che accorcia nel rapporto $1/\sqrt{\lambda}$ le dimensioni secondo $\vec{i}_1$ e allunga nel rapporto $\sqrt{\lambda}$ le ortogonali (fig. 6). Le $(6)_1$, $(6)_2$ rappresentano una deformazione nel piano la quale è simmetrica rispetto alle rette $x=0$ e $x=\pi$ dove gli spostamenti U si annullano: in questi punti, quindi, si annullano le tensioni tangenziali nella direzione $\vec{i}_2$.

L'indagine numerica è stata sviluppata per $n=2$. Si è considerato il campo rettangolare delimitato nello stato iniziale dai lati $x=0$, $x=\pi$, $y=\pm h/2$. Sul lato $y=+h/2$ si è supposto applicato un carico nella direzione $\vec{i}_2$ che dà alla componente lagrangiana dalla tensione la distribuzione $\sigma\cos x$(13): sul lato $y=-h/2$ si introduce la tensione $-\sigma\cos x$, con σ costante. In questa situazione antimetrica, per $y=0$ si annullano le incognite U_1, V_2, P_1: la V_0 che un moto traslatorio del corpo può modificare, si sceglie nulla. A rappresentare la risposta del corpo al carico agente si assume il valore $\bar{V}_1$ sull'orlo della componente V_1 avente la stessa lunghezza d'onda del carico, e quindi implicata nel computo del lavoro relativo. I calcoli numerici sono stati effettuati per $\lambda=3$, $h=4$. Dalla nota teoria(14) risulta che in questa situazione λ è inferiore al valore critico per il quale appare una deformazione per autosoluzione. Perciò nella fase iniziale il corpo reagisce elasticamente (fig. 7). Presto la

---

(13) Le due componenti di tensione sull'orlo, moltiplicate per dx, rappresentano le proiezioni della forza sull'elemento che corrisponde nella deformazione al tratto $\vec{i}_1 dx$ del corpo indeformato. Le tensioni sono riferite al modulo elastico 2μ.

(14) K.N. Sawyers, R.S. Rivlin, *Stability of a thick elastic plate under thrust*, J. Elasticity, 1982, p. 101-124.

reazione, superato un massimo, prende a diminuire con pendenze sempre crescenti: successivamente il diagramma indica una diminuzione nel valore di ascissa (snap back), scendendo a ordinate assai basse (sino a $\sigma = -1.7$). Questa evoluzione della deformazione non è attuabile se l'agente che trasmette il carico non è atto a esercitare l'azione della grandezza e del vero prescritti dal grafico. Peraltro l'inattuabilità di questa evoluzione si manifesta evidente dall'esame geometrico della configurazione. Nella fig. 8 è rappresentata la deformazione del contorno del corpo nella situazione di carico minimo anzidetto. Alcune delle fibre y = costante realizzano la condizione $U=0$ ancorandosi al vincolo ideale sulla faccia opposta alla iniziale: il materiale trabocca dietro la parete di vincolo se non si vieta l'attraversamento della parete a tutti i punti del corpo. Per formulare questa condizione basta prendere in esame la deformata dei segmenti di contorno $y = \pm h/2$, i quali precederanno ogni altro punto del corpo nell'accostarsi alla parete. In una prima fase basta limitarsi a considerare i punti estremi K ($x=\pi$, $y=h/2$ e $x=0$, $y=-h/2$). In base alle espressioni $(6)_1$, $(6)_2$ con gli sviluppi troncati a $n=2$, risulta

$$\partial \vec{P}/\partial x = \vec{i}\,(1 - U_1 + 2U_2). \tag{7}$$

Nel primo tratto della linea *1* di evoluzione del processo di carico, il fattore in parentesi nella (7), che indichiamo con ϕ, si mantiene positivo, decrescendo dal valore *1*: la tangente al contorno in K resta parallela a $\vec{i}_1$ e la fibra ivi situata si accorcia, accostandosi alla lunghezza zero. La tensione principale in quella direzione, negativa, cresce illimitatamente in valore: si riscontra dunque una concentrazione di sforzi localizzata sui due vertici. Per $\phi=0$ la direzione della tengente è indeterminata: però, se si calcolano le quantità $\Delta x_1 = x_1(\pi) - x_1(\pi-\Delta)$, $\Delta x_2 = x_2(\pi) - x_2(\pi - \Delta)$ per $\Delta \to 0$, si nota che Δx_1 decresce come $(\Delta x_2)^{1.5}$: la deformata assume in K la forma di parabola con tangente $\vec{i}_2$ e esponente 1.5, ossia con curvatura infinita. Se si prosegue nel calcolo con le condizioni al contorno invariate, si trova che il vettore tangente (7) si volge nella direzione $-\vec{i}_1$: avviene il traboccamento rappresentato nella fig. 8 e la caratteristica prosegue come è indicato dalla linea a tratto nella fig. 7. Se invece, raggiunta in A la situazione $\phi=0$, si impone che questa condizione permanga mentre dalla parete di vincolo sia trasmessa al corpo una forza in direzione $\vec{i}_2$ volta a contrastare l'avanzata, si trova che tale azione si concentra in K e la caratteristica

$\sigma(V_1)$ risale lungo la linea 2 della fig. 7[15].

Ovviamente queste conclusioni sono inficiate dal troncamento degli sviluppi (6). Per $n > 2$ è da ritenere che possa ottenersi un contatto fra il corpo e la parete, esteso a punti distinti da K. Tuttavia questa indagine approssimata può dare utili indicazioni qualitative sul fenomeno riscontrato.

Conclusioni

Nei tre esempi accennati sono indicate questioni di interesse tecnico risolubili oltrepassando le situazioni critiche e portandosi avanti nel campo non lineare.

Assai istruttiva risulta l'analisi della struttura con imperfezioni di forma. Per il guscio cilindrico completo, questo esame conferma le esperienze che mostrano l'irraggiungibilità del carico assiale critico indicato dalla teoria linearizzata: per qualsiasi deformazioni previa, l'evoluzione sotto carico assiale crescente porta il punto rappresentativo ad accostarsi al cammino peggiore, quello che porta al cedimento di scatto. Invece per il pannello cilindrico, comunque vincolato sui 4 lati di contorno, le restrizioni all'evoluzione della deformazione derivanti dai vincoli prolungano gli effetti della deformazione previa; se questa è di tipo simile a quella del percorso ideale migliore, si riesce a superare il carico critico indicato dalla teoria linearizzata per il pannello perfetto[16].

Similmente informativo risulta l'esame della struttura in presenza di carichi «trasversali», ossia di azioni atte a produrre le deformazioni proprie del percorso deviato. Per il moto piano del solido iperelastico considerato, che raggiunge la situazione critica per $\lambda = 3.201$, un lieve carico trasversale basta a innescare il cedimento di scatto per la deformazione uniforme con $\lambda = 3$ (ossia quando i lati unitari del quadrato nella direzione di compressione e nella ortogonale assumono i valori $1/\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$, rispettivamente). L'esame svolto per spostamenti finiti, diede informazioni sul comportamento della gomma assai meno pessimistiche che quelle

---

(15) Nella fig. 6 sono segnati con punteggiata i lati $y = \pm h/2$ e con tratto continuo le relative deformate nello stato d'equilibrio in assenza del carico trasversale (punto B, fig. 7). Si nota che, nell'approssimazione (6) con $n = 2$, invece del carico trasversale, potrebbero applicarsi le due forze opposte indicate, sui lati $x = 0$, $x = \pi$.

Nella fig. 8 (a) sono segnati gli spostamenti sull'orlo che portano dalla deformazione uniforme allo stato relativo a $\sigma = -1.7$.

(16) Si è riesumato questo studio di 40 anni fa perché indirizzato sulla via che gli attuali strumenti di computo suggeriscono.

fornite dall'analisi perturbativa. Quella venne sviluppata in un'accurata indagine(17) relativa al semispazio sottoposto a compressione su una direzione tangente al piano terminale ed esente da tensioni su quel piano. In tal easo si ha il valore critico $\lambda = 3.383$, sul quale si addensano infinite autosoluzioni. L'analisi perturbativa indica una caduta di resistenza al punto critico con pendenze sempre crescenti con il numero delle autosoluzioni tenute in conto. Dall'esame svolto a distanza del punto critico appare un fenomeno singolare: la superficie del corpo, là dove subisce un corrugamento rientrante, viene a toccare il vincolo previsto (oppure l'onda contigua nel corpo indefinito). Da questo contatto si origina una ripresa nella rigidezza della gomma.

L'analisi non lineare della fune metallica rivela un fenomeno che ne compromette la robustezza: la formazione di un cappio. Sin che questo non si sia verificato il superamento del carico critico non è dannoso. Le indagini svolte per il campo immediatamente postcritico, indicano instabilità per la fune il cui accorciamento sia debolmente contrastato: se il moto dei terminali è controllato, l'inflessione è essenzialmente reversibile. Se invece si forma il cappio e conseguente attorcigliamento (kinking), la deformazione, irreversibile per attrito interno può dar luogo alla frattura. Si è già osservato che l'analisi svolta da Rosenthal si riferisce a casi in cui la fune arriva agli stati critici per compressione: sarebbe certamente interessante accertare la presenza del fenomeno in esame per stati postcritici di trazione inoltre estendere la ricerca ad altre situazioni di vincolo più facilmente attuabili in un controllo sperimentale, in particolare per la fune caricata mediante giunti cardanici (caso per cui si sono trovati risultati più pessimistici di quelli indicati dalla formula di Greenhill).

I calcoli numerici occorrenti per l'analisi non lineare hanno certamente mole notevole. Sia nel caso in cui sia da risolvere un sistema di equazioni algebriche (come s'è fatto, secondo Galerkin, per lo studio menzionato sul guscio cilindrico) sia quando siano da risolvere equazioni differenziali ordinarie (come per la verga) o grossi sistemi di tali equazioni (come nel caso di sviluppi (6) allargati) occorre procedere lungo la traiettoria con passi più o meno corti. L'estrapolazione dei risultati dei passi precedenti guida nella previsione del nuovo passo di integrazione del sistema (shooting) che poi viene perfezionato con processo iterativo: ma l'automatizzazione di questi computi, li rende oggi possibili e anzi meno deterrrenti che i passi avanzati del processo perturbativo, la cui elaborazione algebrica è sede di ineluttabili errori materiali.

---

(17) P. Meijers, *Stability of a rubber half-space*, Report of the Laboratory of Engineering Mechanics, Technische Hogeschool, Delft, Part 1 (1983), Part 2 (1985).

σ/σc
α=β=2
1·25
1
0·5
·25
0·5
1
1·5
Eε/σc
A
a
O
B
a
d
D
b
C
c'
α=β=2
5
w1
4
3
2
1
C
c
a
A
d
a
e
f
B
D
g
h
i
w1'=w2'=0
-1·2
-0·8
-0·4
0
·2
·4
·6
·8
1
1·2
w2

Figura 1

Figura 2

σ/σ_c
2
1
0
1
2
$E\varepsilon/\sigma_c$
m_1
m_2
m_3
m_4
n_1
n_2
N_1
N_2
$w_1' = 0{\cdot}1,\ w_2' = 0{\cdot}025$
$w_1' = w_2' = 0$
$w_1' = 0{\cdot}1,\ w_2' = -0{\cdot}025$
$\alpha = \beta = 2$
w_2
w_1
0·2
-0·2
-0·4
·2
·4
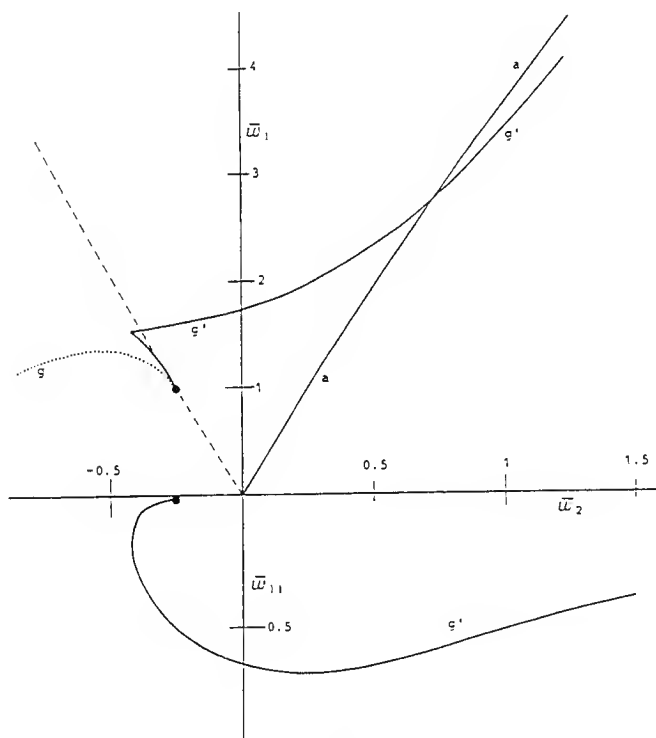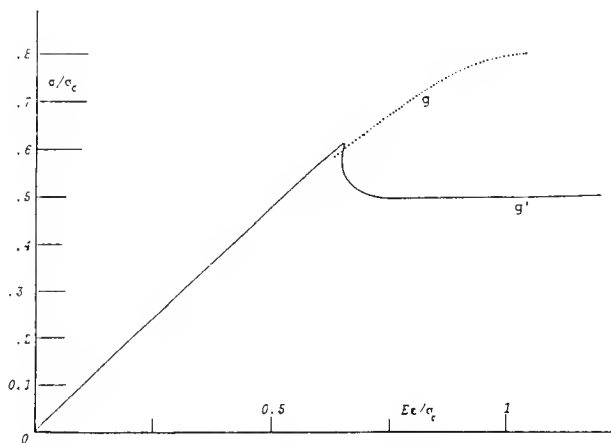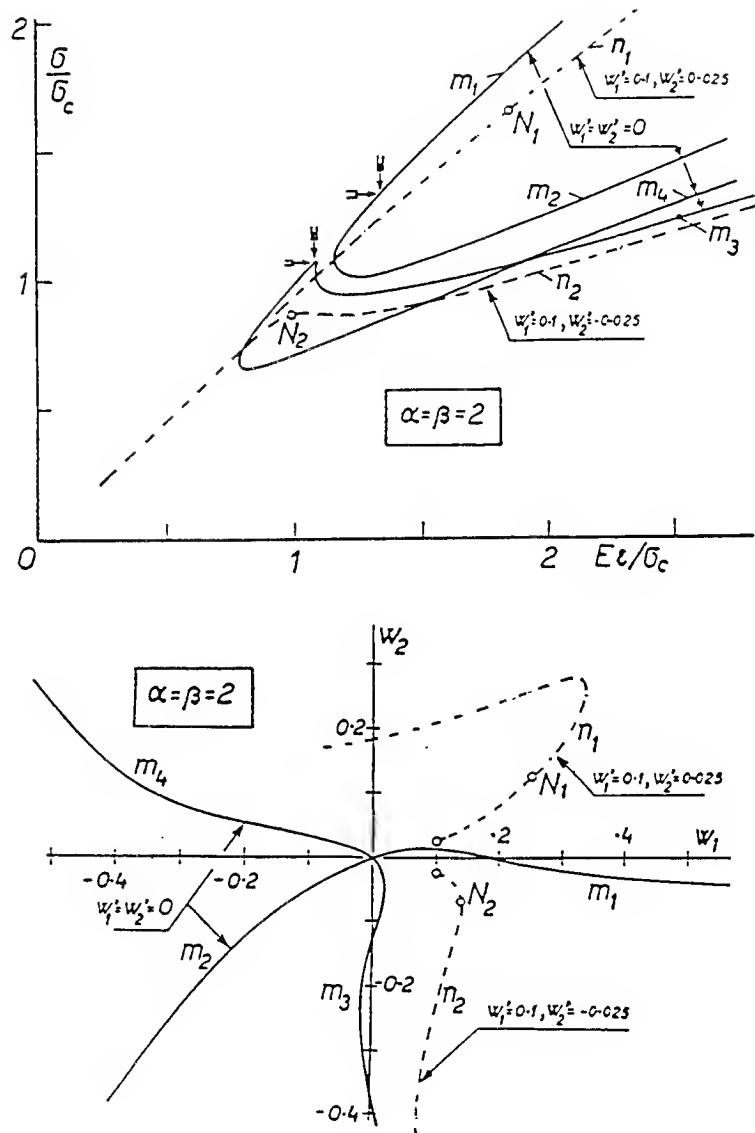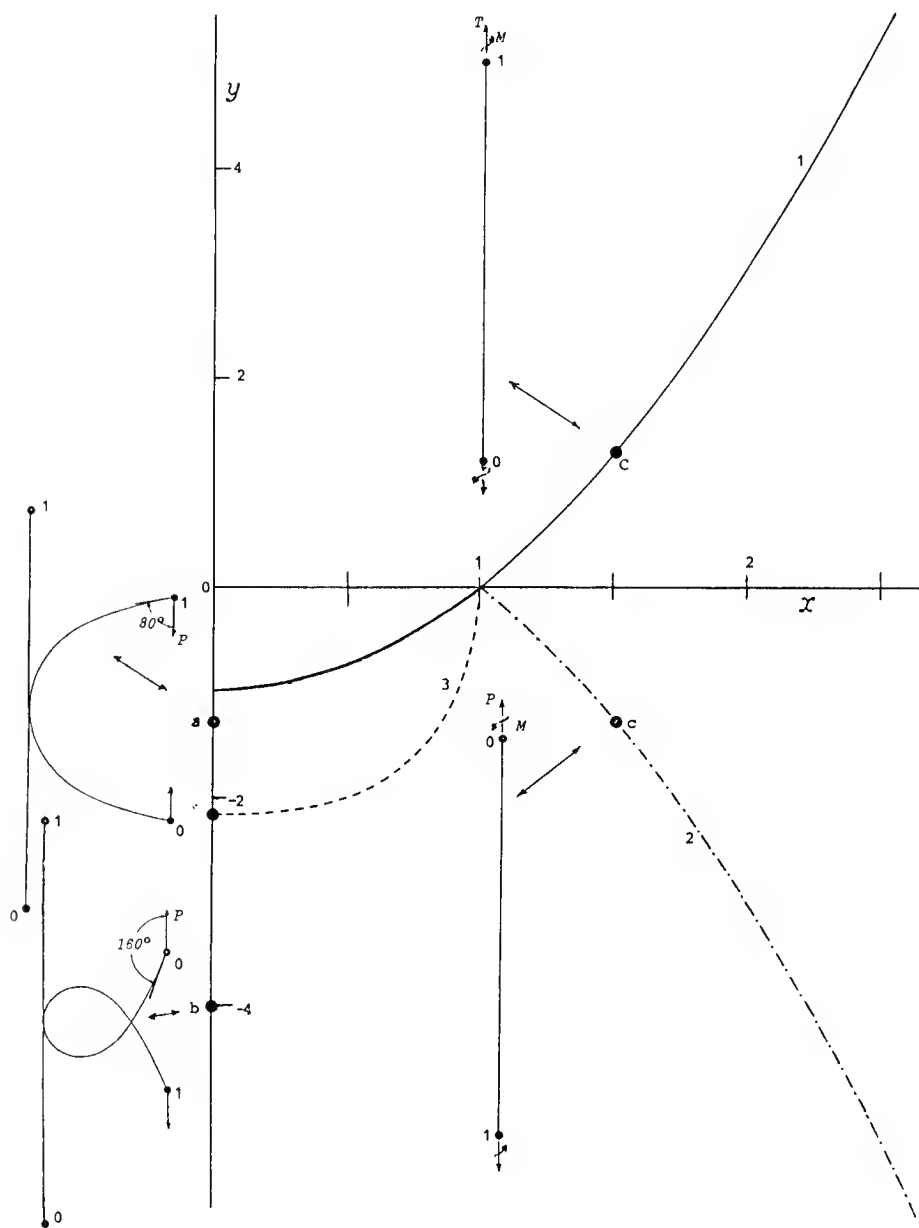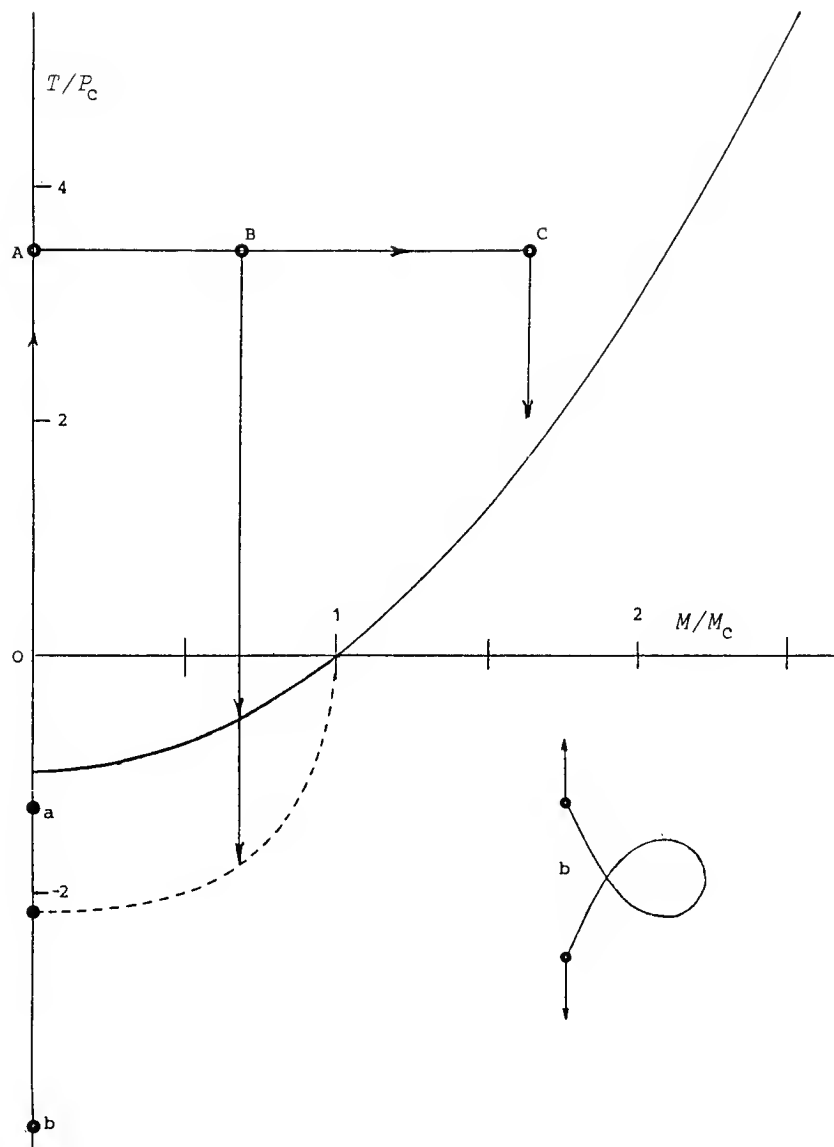
Figura 3

Figura 4

Figura 5
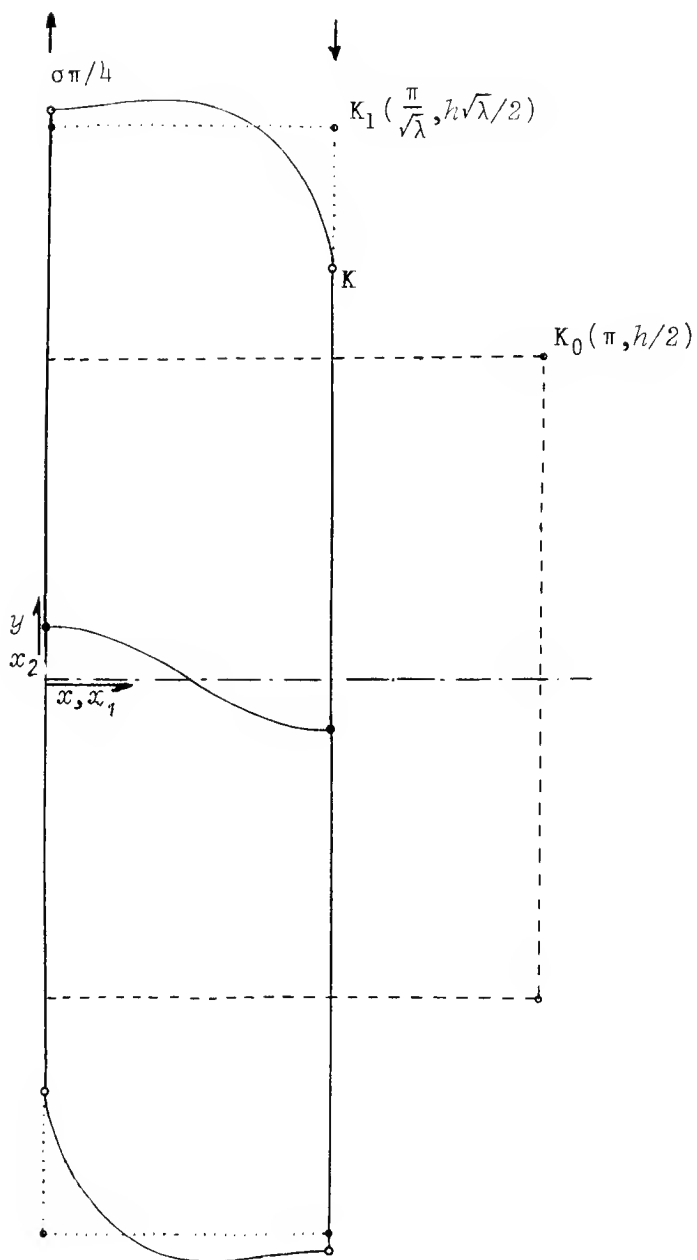
Figura 6
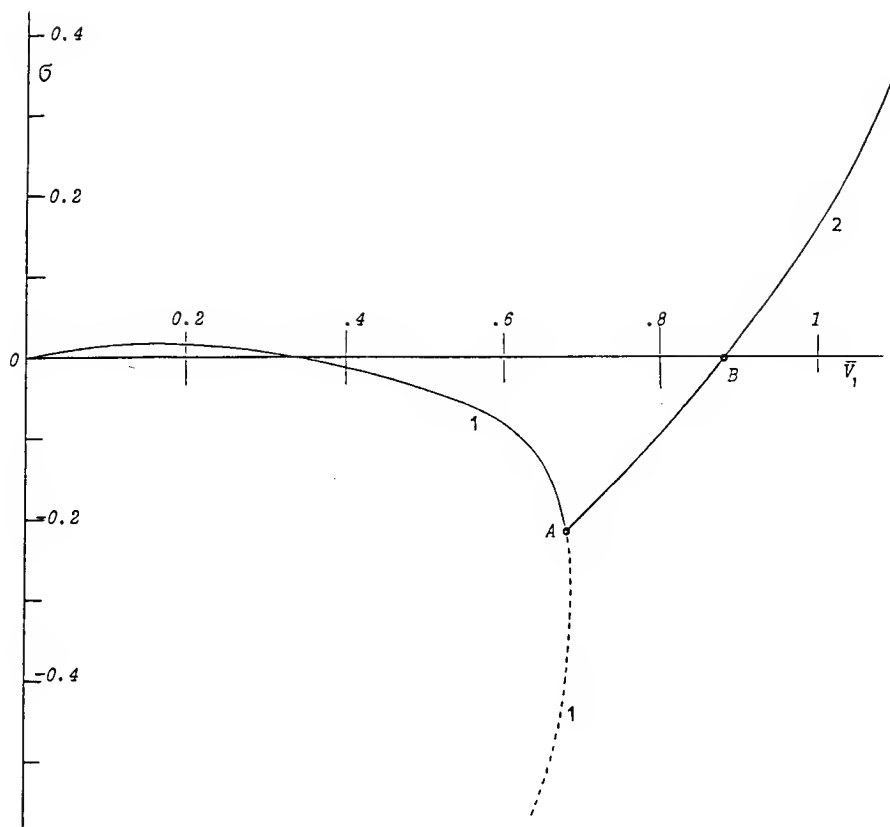
Figura 7
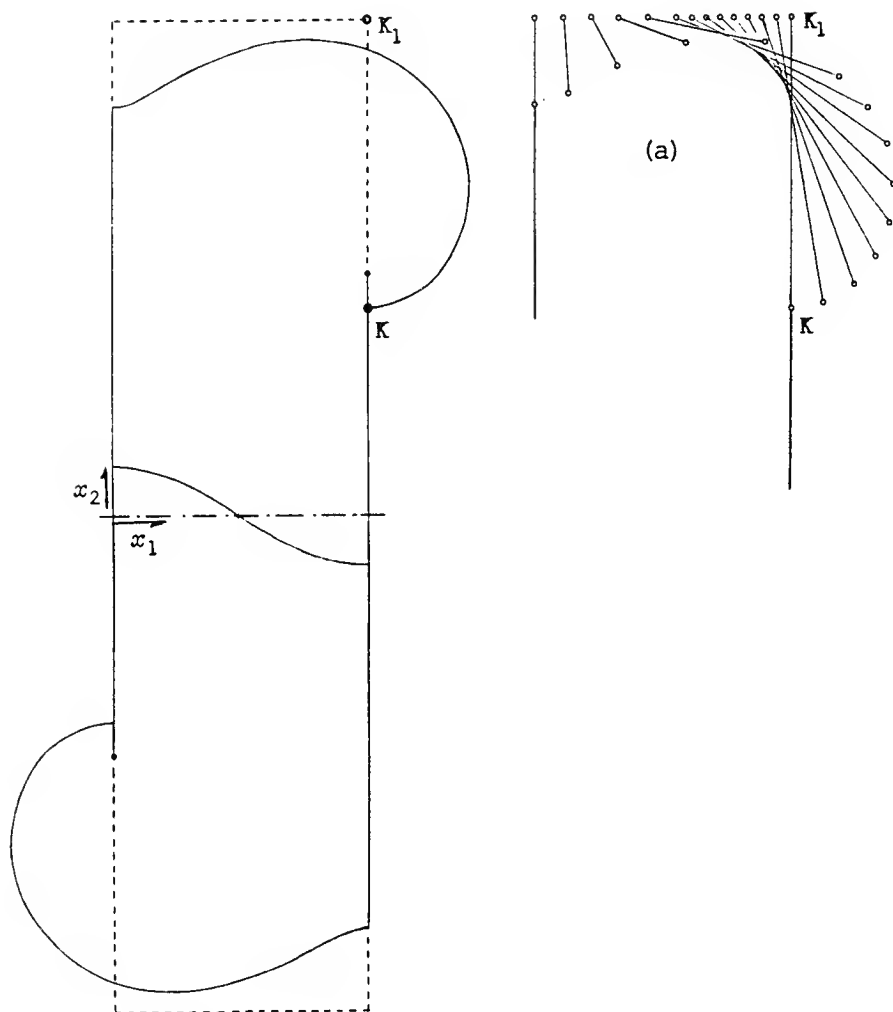
Figura 8

Problemi attuali di robotica

Ario ROMITI*

Come è ben noto, lo studio della robotica richiede apporti di scienza e tecnologia da settori diversi quali la meccanica, l'elettromeccanica, l'elettronica e l'informatica.

In più, i diversi apporti si influenzano a vicenda, per cui, ad esempio, una buona progettazione meccanica conduce ad una più facile soluzione dei problemi di controllo, o, viceversa, un controllo particolarmente potente può sopperire a deficienze di carattere strutturale che possono manifestarsi in certe applicazioni.

Proprio per questo, e per il gran numero di parametri a scelta con cui cimentarsi per la progettazione ottimale di un robot, il relativo studio appare quanto mai stimolante; ciò anche se è vero che la fabbricazione di robot industriali è entrata da alcuni anni in una fase di relativa stabilità.

Non così si può dire però della ricerca, italiana ed internazionale, che dovrà portare alla concezione dei robot della prossima generazione.

Inoltre, ai robot cosiddetti «industriali» si stanno aggiungendo quelli cosiddetti «non industriali», che non hanno un loro posto fisso di lavoro in officina. Di questi robot esistono sinora pochi esemplari funzionanti, certo non per tutte le applicazioni desiderate.

In Italia, esiste ed è al suo primo anno di applicazione il «Progetto Finalizzato Robotica» del CNR, mirato essenzialmente ai robot industriali, oltre ad un progetto dell'ENEA, riguardante i robot mobili; inoltre, vi è la possibilita d'accesso a programmi di ricerca europei (cito come esempio l'EUREKA con un programma sui robot mobili di sorveglianza).

Verranno qui essenzialmente descritti gli sviluppi nel campo della meccanica dei robot, anche se importanti ricerche e sviluppi sono in corso nei settori della applicazione dell'intelligenza artificiale, della sensoristica (particolarmente della visione), della motorizzazione e dei controlli.

I problemi meccanici, poi, possono essere suddivisi in due categorie: una riguarda i problemi di cinematica e dinamica dei robot, indirizzati a fornire ai progettisti dei controlli gli algoritmi matematici la cui elaborazione è necessaria per l'esecuzione delle traiettorie; l'altra riguarda i problemi di progettazione delle configurazioni e dei componenti (di trasmissione, strutturali, ecc.).

* Dip. di Meccanica, Politecnico di Torino, C.so Duca degli Abruzzi, 24, 10129 Torino, Italia.

Per ciò che riguarda la prima categoria dei problemi, una ricerca consiste nel tentativo di dare una formulazione in forma chiusa ai pochi casi d'interesse pratico in cui la cinematica inversa è risolta ancora passo per passo, con minor precisione e rapidità di quanto altrimenti possibile. Tali casi nascono, in generale, da una distribuzione non ottimale degli assi dei giunti, talvolta inevitabile per necessità tecnologiche, come accade in certi robot di saldatura con cablatura interna. Inoltre, qualche miglioramento può ancora essere portato ai metodi di risoluzione delle ambiguità dovute alla non univocità delle relazioni d'inversione.

Problemi molto più imponenti pone la dinamica dei robot.

La questione qui riguarda la possibilità — o meno — di tener conto delle azioni d'inerzia nello stabilire il valore di base della corrente da fornire ai motori per una certa manovra, sulla base dell'indicazione dei sensori che, istante per istante, definiscono la geometria dei vari elementi dei robot nello spazio. Tale valore viene poi corretto in funzione dell'errore istantaneo della posizione attuale rispetto a quella desiderata.

In questi problemi, le possibilità dell'analisi dinamica si possono ritenere esaurite, anche se i risultati non sono soddisfacenti.

Infatti, la risoluzione delle equazioni del moto richiede — di regola — un tempo di calcolo che ne impedisce l'effettuazione in tempo reale. Anche qui, l'applicazione del metodo delle equazioni di d'Alembert ha mostrato la sua superiorità rispetto al metodo delle equazioni di Lagrange, elegante ma troppo costoso in termini di efficienza. Partendo da una prima analisi che prevedeva un numero di operazioni (addizioni e moltiplicazioni) per ciclo di calcolo proporzionale al numero di gradi di libertà per le prime, ed alla quarta potenza per le seconde, si è arrivati, usando sofisticati metodi ricursivi, ad un risultato che, pur meno disastroso del primo, prevede un rapporto circa di 1 a 10 nel numero delle operazioni elementari. Comunque, il numero minimo è sempre troppo alto per una completa integrazione nel controllo delle azioni d'inerzia.

Ci si accontenta allora di tener conto solo di una parte di tali azioni, e precisamente di quelle dovute ai termini della diagonale della matrice d'inerzia, trascurando poi anche le azioni centrifughe e di Coriolis.

Le azioni trascurate sono considerate come un disturbo, corretto dalla retroazione di posizione.

Ciò naturalmente porta ad errori istantanei tanto più grandi quanto più grossi sono i termini trascurati, e richiede retroazioni con forte guadagno, sino al livello ammesso dalla stabilità e robustezza del controllo.

Il problema è apparentemente insolubile; potrebbe essere risolto nella forma presente solo con l'introduzione di processori matematici molto più potenti o — come è anche possibile — con memorie molto più grandi.

Il miglior modo di trattare un problema insolubile è però sempre quello di sopprimerlo.

Si deve tener conto del fatto che il problema dinamico diventa grave quando il robot è spinto ad alte velocità, perché allora i termini delle azioni d'inerzia normalmente trascurati divengono importanti.

Anche l'equilibramento statico delle masse dei vari bracci, che permette di eliminare o ridurre i termini inerziali di accoppiamento fra i vari gradi di libertà, risulta inefficace alle alte velocità.

Ora gli utilizzatori dei robot richiedono proprio macchine sempre più veloci per minimizzare i tempi ciclo, specie nelle operazioni di manipolazione e montaggio.

Non resta quindi che ridurre le masse in gioco.

Si entra così in pieno nella seconda categoria dei problemi meccanici dei robot, quelli relativi alla progettazione.

Occorre qui fare una premessa. Sin dalla loro prima concezione, negli Stati Uniti, la maggior attenzione ed il maggior tempo di studio sono stati dedicati al sistema di controllo. La configurazione fisica ed i componenti meccinici sono stati posti in secondo piano. Poiché questa linea di tendenza ha avuto un seguito un pò dovunque, il robot attuale, che ne è il risultato, è stato paragonato, con una analogia antropomorfa, ad una persona d'intelligenza brillante ma fisicamente menomata.

L'analogia è sostanziata dal paragone fra le prestazioni fisiche di un essere umano e di un robot. L'uomo, considerato come un manipolatore, può maneggiare a velocità discretamente alta carichi sino ad una decina di chili, a velocità un pò più bassa carichi sino a 25 chili, e può fare semplici movimenti anche con carichi intorno al quintale, mentre il suo peso proprio si aggira intorno agli ottanta chili.

Ciò corrisponde a maneggiare con discreta facilità carichi fra un quarto ed un quinto del proprio peso.

Per contrasto, i robot industriali possono maneggiare carichi di gran lunga inferiori, quando rapportati al peso proprio.

Il paragone risulta particolarmente sfavorevole ai robot per bassi carichi.

Inoltre, il costo del sistema di controllo, dei sensori, dell'hardware e del software è praticamente indipendente dalle dimensioni dei robot.

Ne segue che l'inefficienza del sistema meccanico si ripercuote sia sulle prestazioni che sul costo dei robot.

Un importante campo di ricerca riguarda quindi l'alleggerimento delle strutture e delle altre parti mobili, come modo per ridurre l'importanza relativa delle azioni d'inerzia ed il costo globale.

Si deve anzitutto esaminare la natura delle masse più cospicue, e più prossime all'estremità dei robot.

Appare subito che i contributi più importanti sono dovuti alle masse dei motori e riduttori, che altresì contano per una parte sostanziale, ed all'incirca proporzionale alla propria massa, al costo dell'apparecchiatura, e secondariamente alle masse delle strutture portanti dei bracci e dal polso.

Data l'architettura seriale secondo cui tutti gli attuali robot sono costruiti, ogni motoriduttore deve sostenere il carico del successivo, quando i motori sono disposti direttamente sull'asse dei giunti; ne segue che se i motori potessero essere portati sulla base o vicino alla base, utilizzando trasmissioni lunghe, anche la struttura portante potrebbe essere molto alleggerita senza ridurre la rigidezza strutturale. Le trasmissioni (mediante sistemi articolati, alberi rotanti, catene o cinghie dentate, con eventuali rinvii ed ingranaggi) dovrebberò però essere in grado di assicurare la stessa rigidezza e gli stessi limiti di tolleranza per i giochi dati dai motoriduttori montati sugli assi.

Ciò richiede componenti di alta precisione e sistemi di ripresa automatica del gioco e del tensionamento di cinghie o catene, che non abbassino il valore della frequenza minima di vibrazione della trasmissione. Questo richiede, ad esempio, apparecchiature di tensionamento particolari, capaci di interdire ogni oscillazione fra le parti.

Le strutture portanti dei bracci possono essere alleggerite a loro volta usando materiali leggeri come le fibre di carbonio od il titanio: tali soluzioni hanno però limiti di costo, e, per ciò che riguarda le fibre di carbonio, vi è qualche problema addizionale dovuto al relativamente basso modulo di elasticità ed al basso valore dello smorzamento strutturale.

Un notevole contributo alla riduzione delle masse dei motori può venire anche da un buon bilanciamento dei bracci principali con attuatori pneumatici. Uno studio in corso punta all'estensione ad ogni possibile posizione dei bracci degli attuali sistemi di bilanciamento, la cui efficacia è attualmente limitata a piccole variazioni della configurazione ed è solo parziale.

I risultati raggiunti sono già soddisfacenti ma sono previsti ulteriori sviluppi.

Il problema dell'alleggerimento del robot risulterebbe pressoché risolto se esso venisse costruito con architettura parallela. Allora, tutti i motoriduttori potrebbero essere installati sulla base fissa.

Gli inconvenienti che si oppongono a questa soluzione sono duplici: da una parte vi è una inerente mancanza di destrezza dell'organo finale (che potrebbe essere superata dall'adozione di una soluzione mista, parallelo-serie); dall'altra vi è la attuale mancanza di un sistema di controllo adatto, e le difficoltà di trovare un algoritmo che permetta la risoluzione della cinematica inversa.

Tutti questi problemi sono stati però superati nel caso in cui siano necessarie unicamente micromovimentazioni attorno a date posizioni.

Altri problemi meccanici di configurazione si trovano quando si vuole aumentare la destrezza di un robot, mediante un numero sovrabbondante di gradi di libertà. Per questo sono stati costruiti robot flessibili, del tipo a tromba d'elefante o del tipo a spina dorsale, la cui scarsa rigidezza però non li rende adatti per operazioni richiedenti una buona precisione. Sono in fase di esecuzione delle strutture snodate ad elementi rigidi che potrebbero essere utilizzate, ad esempio, per lavorazioni all'interno di recipienti attraverso un passo d'uomo.

Alla meccanica dei robot attiene anche il campo degli organi di presa, per ciò che non riguardi l'eventuale sensorizzazione mediante trasduttori non meccanici e l'eventuale impiego di una intelligenza locale.

Sono state costruite mani artificiali per la presa di oggetti delle più varie forme e dimensioni; le mani più efficaci appaiono essere quelle costruite sul modello umano, con quattro dita di tre falangi ciascuna, ed un pollice contrapposto; ciascun dito può muoversi indipendentemente dagli altri, chiudendo le falangi, sino a bloccarsi sotto un dato sforzo. Per lo studio di tali sistemi complessi implicanti la movimentazione contemporanea di molti corpi nello spazio, siano essi mani di presa o robot snodati con gradi di libertà sovrabbondanti, un aiuto fondamentale è offerto dalle tecniche di simulazione e di grafica computerizzata, ed in particolare dalla modellazione solida dei vari elementi chiamati ad interagire.

Esiste infine il vasto settore applicativo dei robot mobili, che appare, al momento, quello destinato ai più interessanti sviluppi futuri.

Qui, oltre a qualche risultato già consolidato, sono state effettuate o sono in corso ricerche sia indirizzate a finalità precise che di aspetto esplorativo.

Si può notare che, mentre il robot industriale è stato essenzialmente ispirato al modello antropomorfo, buona parte dei robot mobili si ispirano ad altri modelli zoologici.

Si vedono così macchine replicanti il passo, il trotto o la corsa di un cavallo; il moto di un serpente; l'andatura di un insetto (generalmente esapode); il salto di una cavalletta, e persino il modo di muoversi di una piovra aggrappata ad un solido, utilizzata, in un progetto già esecutivo, per la manutenzione di piattaforme petrolifere marine.

Le attuali od eventuali applicazioni coprono un campo vastissimo, dalle attività spaziali a quelle edili e minerarie, con interesse per i problemi della difesa civile (protezione antincendio, mezzi antiterrorismo, sorveglianza contro le intrusioni, ecc.), della difesa ambientale (mani-

polazione di sostanze tossiche o radioattive, operazioni di smantellamento di centrali nucleari), e persino per le spesso dimenticate attività domestiche.

Sono stati, per esempio, progettati e costruiti presso il nostro laboratorio un robot a ruote e zampe per uso in ambienti strutturati, capace di muoversi in corridoi e salire e scendere le scale, ed un robot a cingoli con possibilità di assumere configurazioni da insetto, per ambienti non strutturati.

Tali realizzazioni sono intese a porre in pratica un'idea iniziale, risolvendo man mano tutti i problemi che appaiono non appena si passa da un progetto su carta alla fabbricazione ed alla sperimentazione dell'oggetto, in modo che la sua fattibilità venga chiaramente dimostrata.